

ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ
«ОБРАЗОВАНИЕ»

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Р. В. ШАМИН

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ
ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Москва

2008

Инновационная образовательная программа Российского университета дружбы народов
«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование
инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать
государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Шамин Р.В.

Актуальные проблемы компьютерного моделирования нелинейных волновых процессов. — М.: РУДН, 2008. — 160 с.

Учебное пособие посвящено современным методам компьютерного моделирования нелинейных волновых процессов. Основное внимание уделено проблемам нелинейной динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Рассматриваются теоретические аспекты моделирования нелинейных эволюционных задач и практические методы проведения вычислительных экспериментов. Учебное пособие адресовано магистрантам, обучающимся по направлениям «Информационные технологии», «Прикладная математика и информатика», «Физика», «Математика. Прикладная математика», «Автоматизация и управление».

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, по магистерской программе «Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и междисциплинарных исследованиях».

©Шамин Р.В.

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 7 |
| Глава 1. Уравнения идеальной жидкости | 10 |
| 1.1. Уравнения движения идеальной жидкости | 10 |
| 1.2. Двумерное течение | 13 |
| 1.3. Поверхностные волны идеальной жидкости | 16 |
| 1.4. Уравнения в конформных переменных, разрешенных относительно производных по времени | 18 |
| 1.5. Уравнения Дьяченко | 22 |
| 1.6. Уравнения для конечной глубины | 25 |
| 1.7. Уравнения, описывающие стационарные волны | 28 |
| Глава 2. Разрешимость уравнений, описывающих динамику идеальной жидкости со свободной поверхностью | 31 |
| 2.1. Шкалы функциональных пространств | 31 |
| 2.2. Существование и единственность решений | 34 |
| 2.3. Минимальная гладкость решений | 37 |
| 2.4. Описание абстрактного проекционного метода | 40 |
| 2.5. Обоснование абстрактного проекционного метода | 42 |
| 2.6. Случай шкалы гильбертовых пространств | 45 |
| Глава 3. Численные методы | 50 |
| 3.1. Применение проекционного метода | 50 |
| 3.2. Применение теории регуляризации | 52 |

| | |
|---|----|
| 3.3. Регуляризация метода прямых в условиях машинной точности | 59 |
| 3.4. Применение сплайн-аппроксимации | 71 |

Глава 4. Конструктивная оценка времени существования аналитических решений 80

| | |
|---|----|
| 4.1. Оценка времени существования решений на компактных множествах | 81 |
| 4.2. Оценка времени существования решений по невязке | 83 |
| 4.3. Оценочные функционалы | 90 |
| 4.4. Оценка времени существования поверхностных волн идеальной жидкости | 92 |

Глава 5. Применение методов статистики в численных экспериментах 94

| | |
|---|----|
| 5.1. Статистическое исследование времени существования решений со случайными начальными данными | 94 |
| 5.2. Статистическая проверка гипотез о существовании решений | 98 |

Глава 6. Проведение вычислительных экспериментов в теории поверхностных волн 116

| | |
|--|-----|
| 6.1. Вычислительный эксперимент: построение бегущих волн | 116 |
| 6.2. Вычислительный эксперимент: стоячие волны | 117 |
| 6.3. Вычислительный эксперимент: стационарные волны | 125 |
| 6.4. Моделирование обрушивающейся волны | 129 |
| 6.5. Моделирование неустойчивости Релея-Тейлора | 138 |

| | |
|--|------------|
| 6.6. Моделирование динамики по идеальной жидкости в условиях вibrации | 140 |
| 6.7. Моделирование волн-убийц | 150 |
| Литература | 156 |

Введение

В настоящем пособии рассматриваются современные аспекты компьютерного моделирования нелинейных волновых процессов, в частности, математические модели, описывающие физические процессы. В качестве основного физического явления выбрано волновое движение идеальной жидкости. Хорошо известно, что нелинейные задачи математической гидродинамики являются достаточно сложными и содержащими много нерешенных задач.

Начинаем с рассмотрения математических моделей, описывающих волновое движение жидкости, после чего изучаем корректность полученных уравнений. Для компьютерного моделирования необходимо иметь не только результаты о существовании решений, но и обоснованные численные методы. Строим численные методы, которые могут быть эффективно использованы при компьютерном моделировании.

Все представленные нами модели являются нелинейными уравнениями. При моделировании нестационарных нелинейных уравнений возникает принципиальная проблема — конструктивная оценка времени существования решений. Изучаем различные математические методы, позволяющие получать оценку времени существования решений с помощью доказательных вычислений. При изучении нестационарных нелинейных уравнений развиваем также и статистические методы для исследования проблем разрешимости этих уравнений.

После изучения математических аспектов моделирования нелинейных волновых процессов приводим большое количество реальных вычислительных экспериментов.

Рассмотрим содержание пособия.

Первая глава посвящена изучению основных уравнений, описывающих нелинейную динамику идеальной жидкости. Начинаем с уравнений Эйлера, описывающих динамику несжимаемой идеальной жидкости. Затем переходим к рассмотрению поверхностных волн идеальной жидкости. Заметим, что всюду рассматриваем исключительно идеальную жидкость без вязкости. Помимо классических уравнений рассматриваем уравнения, описывающие динамику поверхностных волн в конформных переменных. Эти уравнения полученные, А.И. Дьяченко, оказались очень удобными как для теоретического исследования, так и для проведения численных расчетов.

Во второй главе рассматриваем вопросы корректности уравнений. Основные уравнения представляют собой системы нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных, доказываем теоремы о существовании аналитических решений. При рассмотрении уравнений, описывающих поверхностные волны, сводим нашу задачу к абстрактной задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве.

Третья глава посвящена изучению численных методов и рассмотрению абстрактного варианта наших уравнений. Основным численным методом нами выбран проекционный метод сведения абстрактных уравнений в гильбертовом пространстве к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы не только даем обоснование построенным численным методам, но и рассматриваем различные аспекты реализации этих численных методов на ЭВМ. В частности, мы изучаем проблемы машинной точности при применении их к нестационарным задачам. Также в этой главе затрагиваются вопросы применения сплайн-интерполяции для построения приближенных решений на неравномерных сетках.

В четвертой главе мы рассматриваем различные методы для конструк-

тивной оценки времени существования аналитических решений. Основные результаты четвертой главы относятся к общим системам Коши-Ковалевской, однако мы применяем их к нашим уравнениям, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости. Рассматриваемые методы оценки времени существования решений реализованы и использованы в главе, где приводятся вычислительные эксперименты.

Пятая глава посвящена применению методов статистики для исследования вопросов разрешимости нелинейных эволюционных уравнений. В этой главе представлены различные подходы, связанные со статистическими подходами, для решения ряда актуальных и сложных задач математической гидродинамики.

В последней шестой главе приводится большое количество реальных вычислительных экспериментов в математической гидродинамике и океанологии. Эти эксперименты спланированы таким образом, чтобы продемонстрировать все основные математические аспекты, изученные в предыдущих главах. Рассматриваются различные режимы волнового движения жидкости: от стационарных и стоячих поверхностных волн до моделирования неустойчивости Релея-Тейлора и моделирования волн-убийц.

Заметим, что все программы, которые мы использовали при проведении вычислительных экспериментов, а также другая полезная информация доступны на специальном Интернет-портале группы «Экспериментальной математики» www.calcs.ru, разработанным автором для поддержки исследований в области вычислительных экспериментов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Александру Леонидовичу Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

Автор с благодарностью примет пожелания и замечания по адресам: roman@shamin.ru, www.shamin.ru.

Глава 1

Уравнения идеальной жидкости

1.1. Уравнения движения идеальной жидкости

Наша работа посвящена математической гидродинамике, поэтому будем рассматривать движение жидкости исключительно с механической точки зрения, игнорируя химические и другие физические процессы и свойства жидкости. Начнем с ряда упрощающих предположений, которые позволят построить математическую модель движения жидкости. Во-первых, будем считать жидкость сплошной и однородной средой и описывать состояние жидкости, занимающей объем $Q \subset \mathbb{R}^3$, будем с помощью поля скоростей: $\vec{v}(x) = (v^1(x), v^2(x), v^3(x))$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in Q$. Переменные $\vec{v}(x)$ называются переменными Эйлера. Поскольку будем рассматривать нестационарное течение жидкости, то поле скоростей будет зависеть от времени: $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$, объем области также может зависеть от времени (в частности, в задачах со свободной поверхностью): $Q = Q(t)$. Во-вторых, будем считать жидкость несжимаемой. В терминах поля скоростей этот факт выражается формулой:

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, t) = v_{x_1}^1 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^3 = 0, \quad x \in Q(t). \quad (1.1)$$

Условие (1.1) доставляет значительные трудности при теоретическом изучении уравнений, а также при проведении численных расчетов. В-третьих, будем рассматривать жидкости при отсутствии вязкости. Исключение из рассмотрения вязкости жидкости означает не только изменение коэффициента в уравнениях, но и изменение самих уравнений и граничных условий. Следовательно, пренебрежение коэффициентом вязкости может подвергаться критике, однако нашей целью является изучение поверхностных волн идеальной жидкости.

Поскольку будут изучаться поверхностные волны, то рассматривается тяжелая жидкость, находящаяся с однородном поле силы тяжести. Наша жидкость будет обладать однородной плотностью. В некоторых разделах, посвященных неустойчивости Релея-Тейлора, будем рассматривать движение жидкости в отрицательном поле тяжести.

Перейдем к основным уравнениям, описывающим динамику идеальной несжимаемой жидкости. Для описания течения жидкости нами выбраны эйлеровы координаты. В этих координатах динамика идеальной жидкости описывается системой уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} v_t^1 + v^1 v_{x_1}^1 + v^2 v_{x_2}^1 + v^3 v_{x_3}^1 + p_{x_1} &= F^1(x, t), \\ v_t^2 + v^1 v_{x_1}^2 + v^2 v_{x_2}^2 + v^3 v_{x_3}^2 + p_{x_2} &= F^2(x, t), \\ v_t^3 + v^1 v_{x_1}^3 + v^2 v_{x_2}^3 + v^3 v_{x_3}^3 + p_{x_3} &= F^3(x, t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$v_{x_1}^1 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^3 = 0,$$

где $\vec{F}(x, t) = (F^1, F^2, F^3)$ есть внешняя сила, действующая на жидкость, скалярная функция $p(x, t)$ называется давлением. Неизвестными в этой системе уравнений являются поле скоростей $\vec{v}(x, t)$ и давление $p(x, t)$.

Система уравнений Эйлера (1.2) должна быть дополнена граничными и начальными условиями. Предположим, что объем жидкости остается неизменным во времени и ограничен границей, сквозь которую жидкость не может протекать. Эту границу обозначим Γ . Будем считать, что поверхность Γ не имеет самопересечений. За исключением специально оговоренных случаев, будем предполагать, что поверхность Γ является кусочно-гладкой, и при почти всех $x \in \Gamma$ определен вектор внешней нормали $\vec{n}(x)$. Условие непротекания через границу означает, что нормальная скорость на границе равна нулю:

$$(\vec{n}(x), \vec{v}(x, t))_{\mathbb{R}^3}, \quad x \in \Gamma. \quad (1.3)$$

Граничные условия на свободной границе существенно отличаются от условий непротекания. Эти условия подробно обсудим позже. Заметим, что при рассмотрении задач гидродинамики, возникающих в океанологии, области, занимаемые жидкостью, часто имеют огромные размеры, поэтому при численном моделировании удобно использовать периодические граничные условия.

Несмотря на то, что в систему (1.2) не входит производная по времени от давления, уравнения Эйлера являются эволюционной системой с выделенной переменной t , означающей время. При изучении динамики эволюционных систем необходимо задавать начальные условия:

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{v}_0(x), \quad (x \in Q) \quad (1.4)$$

$$p(x, 0) = p_0(x).$$

Поскольку давление $p(x, t_0)$ может быть определено по полю скоростей $\vec{v}(x, t_0)$ при фиксированном t_0 , то начальные условия (1.4) должны удовлетворять соответствующим условиям согласования.

Система уравнений Эйлера представляет собой очень сложную математическую задачу как в плане доказательства теорем о существовании и единственности решений этой системы, так и с вычислительной точки зрения. В двумерном случае результаты о разрешимости уравнений Эйлера получены в работах [35], [39]. В трехмерном случае до настоящего момента результатов о глобальной (по времени) разрешимости уравнения Эйлера неизвестно. Существование решений на достаточно малом временном интервале в трехмерном случае рассматривалось в работах [11], [40].

1.2. Двумерное течение

Двумерный случай существенно отличается от трехмерного случая. В двумерной ситуации можно ввести другие переменные, значительно более подходящие для численного счета. Предположим, что $v^3 \equiv 0$, $p_{x_3} \equiv 0$, тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} v_t^1 + v^1 v_{x_1}^1 + v^2 v_{x_2}^1 + p_{x_1} &= F^1(x, t), \\ v_t^2 + v^1 v_{x_1}^2 + v^2 v_{x_2}^2 + p_{x_2} &= F^2(x, t), \quad (x, t) \in Q(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$v_{x_1}^1 + v_{x_2}^2 = 0.$$

Введем вихрь по формуле:

$$\xi = v_{x_1}^2 - v_{x_2}^1. \quad (1.6)$$

Предполагая, что все функции имеют нужную гладкость, исключим давление из системы уравнений (1.5), учитывая, что $p_{x_1 x_2} = p_{x_2 x_1}$. Для этого первое уравнение дифференцируем по переменной x_2 , второе — по x_1 , и вычитаем первое уравнение из второго. Получаем одно уравнение:

$$\xi_t + v_{x_1}^1 \xi + v^1 \xi_{x_1} + v_{x_2}^2 \xi + v^2 \xi_{x_2} = F_{x_2}^1 - F_{x_1}^2.$$

Теперь, учитывая уравнение несжимаемости жидкости, имеем уравнение

$$\xi_t + v^1 \xi_{x_1} + v^2 \xi_{x_2} = F_{x_2}^1 - F_{x_1}^2. \quad (1.7)$$

Для решения уравнения (1.7) необходимо уметь восстанавливать вектор скорости \vec{v} по вихрю ξ . С этой целью введем функцию тока $\psi(x, t)$ следующим образом

$$\psi_{x_2} = v^1, \quad (1.8)$$

$$\psi_{x_1} = -v^2.$$

Дифференцируя первое соотношение по x_2 , а второе — по x_1 , после чего складывая эти уравнения, получаем

$$-\Delta\psi = \xi. \quad (1.9)$$

С уравнением Лапласа (1.9) нужно связать соответствующие граничные условия, например периодические. После чего эту задачу можно решить численно, а иногда и точно.

В качестве примера точного нетривиального решения рассмотрим стационарное решение задачи (1.7)–(1.9). Пусть $Q = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ есть квадрат. Предположим, что наше течение 2π -периодично по переменным x_1, x_2 , таким образом будем рассматривать периодические граничные условия. В качестве начального условия выберем

$$\xi_0(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2. \quad (1.10)$$

А внешнюю силу будем считать равной нулю:

$$F_1 = 0 \quad F_2 = 0.$$

Из уравнения, учитывая периодические граничные условия, получаем, что

$$\psi = \sin x_1 \sin x_2.$$

Согласно формулам (1.8) имеем:

$$v^1 = \sin x_1 \cos x_2,$$

$$v^2 = -\cos x_1 \sin x_2.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1.7) видим, что

$$\xi_t = 0.$$

Следовательно, решение $\xi(x, t) = \sin x_1 \cos x_2$ является решением задачи (1.7)–(1.9) с начальным условием (1.10) и периодическими начальными условиями. На рис. 1.1 приведем поле скоростей, отвечающее этому решению.

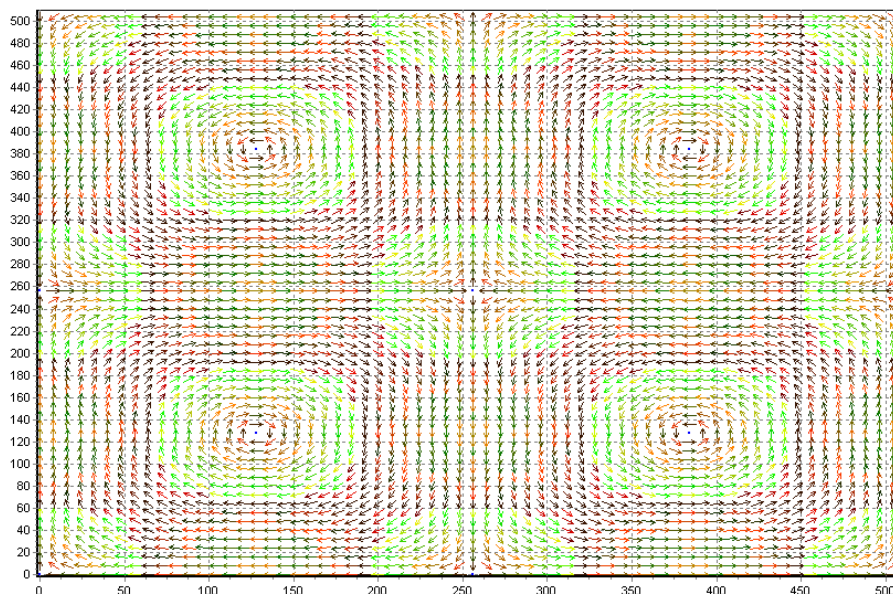


Рис. 1.1. Поле скоростей при $\xi_0 = \sin x_1 \sin x_2$

Упражнение 1.1. Доказать, что уравнение (1.9) разрешимо при периодических граничных условиях.

1.3. Поверхностные волны идеальной жидкости

С этого момента будем рассматривать двумерное течение идеальной жидкости со свободной границей и бесконечно глубоким дном. Конкретнее, пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченной свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y < \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что движение жидкости является потенциальным, т.е. существует функция $\Phi(x, y, t)$ такая, что поле скоростей \vec{v} задается по формуле:

$$\vec{v}(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t).$$

Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0. \tag{1.11}$$

Будем рассматривать движение жидкости в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения g .

Уравнение (1.11) является простейшим линейным уравнением в частных производных, однако особая сложность в изучении поверхностных волн заключается в нелинейных граничных условиях. Тем более, что неизвестной (и искомой) функцией является не только потенциал скоростей, но и профиль волны — свободная поверхность, которая задается функцией $\eta(x, t)$.

Рассмотрим граничные условия. Во-первых, это так называемое кинематическое условие:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0. \tag{1.12}$$

Во-вторых, динамическое условие:

$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} = 0. \quad (1.13)$$

Это условие означает, что давление на свободной поверхности должно быть равно нулю. Напомним, что рассматриваются исключительно гравитационные поверхностные волны, исключая из нашей модели внешнее воздействие (ветер, флотирующие объекты). В-третьих, на дне должно быть выполнено условие непротекания, т.е. вертикальная компонента скорости v^2 должна быть равна нулю при $y \rightarrow -\infty$:

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0. \quad (1.14)$$

По переменной x будем рассматривать периодические краевые условия. Поскольку рассматриваем нестационарную задачу, то необходимо задать начальные условия для Φ и η :

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y). \quad (1.15)$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x). \quad (1.16)$$

Задача (1.11)–(1.16) представляет собой замкнутую систему уравнений. В различных функциональных классах эта задача изучалась во многих работах. Рассматривались также обобщения этой задачи на трехмерный случай. Не претендуя на полноту библиографических ссылок, приведем лишь некоторые работы: [19], [21], [20], [46], [37]. В них работах доказана корректность задачи (1.11)–(1.16), в частности, было доказано существование решений этой задачи на достаточно малом временном интервале. Реальные и численные эксперименты убедительно показывают, что явление обрушения волн и/или образования особенностей за конечное время возникает для большинства волн. Поэтому проблема оценки времени существования ре-

шений, описывающих нелинейную динамику поверхностных волн, является принципиальной.

Система (1.11)–(1.16) является консервативной, т.е. сохраняющей полную механическую энергию. Полная энергия состоит из суммы кинетической T и потенциальной U энергий. Приведем формулы для вычисления энергии:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} |\nabla \Phi|^2 dy,$$

$$U = \frac{g}{2} \int_0^{2\pi} \eta^2(x, t) dx.$$

Удобно ввести величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [12]).

В работе [28] система уравнений (1.11)–(1.16), включая граничные условия, получена из вариационных принципов.

1.4. Уравнения в конформных переменных, разрешенных относительно производных по времени

Задача (1.11)–(1.16) является достаточно сложной для непосредственного изучения. Следуя работе [12], перепишем задачу (1.11)–(1.16) в других обозначениях. В этой главе будем рассматривать 2π -периодические граничные условия по переменной x . Представленные уравнения могут быть записаны и без перехода к периодическим граничным условиям, однако при рассмотрении численных методов решения этих уравнений периодические условия гораздо удобнее. Заметим, что для моделирования мелкомасштаб-

ных явлений в океане переход к периодическому случаю не ограничивает общности.

Сделаем несколько предположений относительно области, занимаемой жидкостью в начальный момент времени ($t = 0$). В предыдущей главе предполагалось, что свободная поверхность идеальной жидкости ограничена однозначной непрерывной функцией $\eta(x, t)$. Если условие непрерывности является физически необходимым, то требование однозначности этой функции возникло из уравнений (1.11)–(1.16). В то же время волновое движение жидкости может иметь свободную поверхность, у которой нет однозначной проекции на ось x . Одной из важных особенностей подхода к теории волн идеальной жидкостью с помощью конформных переменных является то, что уравнения в конформных переменных допускают параметрическое задание свободной поверхности. И так предположим, что наша жидкость ограничена свободной поверхностью, заданной геометрическим местом точек:

$$\{(x(u, t), y(u, t)) : u \in [0, 2\pi], t > 0\},$$

где $x(u, t)$, $y(u, t)$ — суть непрерывные функции. Считаем, что свободная поверхность является 2π -периодичной вдоль оси x . В связи с этим полагаем, что:

$$x(0, t) = 0$$

$$x(2\pi, t) = 2\pi,$$

$$y(0, t) = y(2\pi, t).$$

Помимо непрерывности функций x , y будем предполагать, что свободная поверхность не имеет точек самопересечений. В дальнейшем уточним гладкость функций x , y , а сейчас заметим, что в силу теоремы Римана можно совершить конформное отображение области, занимаемой жидкостью в

плоскости (x, y) , в нижнюю полуплоскость в переменных (u, v) :

$$0 < u < 2\pi,$$

$$-\infty < v < 0.$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде:

$$y = y(u, t),$$

$$x = u + \tilde{x}(u, t),$$

где $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны оператором Гильберта:

$$y = \mathbb{H}[\tilde{x}],$$

(1.17)

$$\tilde{x} = -\mathbb{H}[y].$$

Оператор Гильберта представляет собой сингулярный интегральный оператор, определенный (для периодических функций) по формуле:

$$\mathbb{H}[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} f(u') \operatorname{ctg} \left(\frac{u' - u}{2} \right) du'.$$

В образах коэффициентов Фурье оператор Гильберта имеет очень простой вид:

$$\mathbb{H} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{iku} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i \operatorname{sign}(k) a_k e^{iku}.$$

В главах, посвященных численному моделированию, будут рассмотрены эффективные способы приближенного вычисления оператора Гильберта на равномерных и неравномерных сетках.

Как показано в работе [12], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$, где $\Psi(u, \cdot)$ является значение потенциала скоростей на свободной поверхности, полностью

описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$y_t = y_u \mathbb{H} \left[\frac{\mathbb{H}[\Psi_u]}{J} \right] - x_u \frac{\mathbb{H}[\Psi_u]}{J}, \quad (1.18)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + (\mathbb{H}[\Psi_u])^2}{2J} + \mathbb{H} \left[\frac{\mathbb{H}[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u + \frac{\mathbb{H}[\Psi_u]}{J} \mathbb{H}[\Psi_u] - gy, \quad (1.19)$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения. С уравнениями связываются 2π -периодические граничные условия по переменной u и начальные условия:

$$y(u, 0) = y_0(u), \quad (1.20)$$

$$\Psi(u, 0) = \Psi_0(u). \quad (1.21)$$

Заметим, что в силу соотношений (1.17) функция x для вычисления J однозначно восстанавливается по функции y . Несмотря на некоторую громоздкость уравнений (1.18)–(1.19), эти уравнения разрешены относительно производных по времени. Следовательно, имеем эволюционную задачу, которую можно численно пытаться решать методом Фурье. Однако, как показали вычислительные опыты, применение стандартных численных схем к этим уравнениям натывается на серьезные трудности, связанные с численной неустойчивостью вычислительного процесса. В пункте 3.3 покажем, что эти трудности связаны главным образом с погрешностями машинных вычислений. В том же пункте 3.3 рассмотрим способы регуляризации вычислительного процесса в условиях машинной точности.

Далее будут изучаться уравнения, названные уравнениями Дьяченко, которые являются следствием уравнений (1.18)–(1.19). При этом новые уравнения будут иметь значительно более простой вид и значительно более подходить для теоретического и численного анализа.

1.5. Уравнения Дьяченко

Как оказалось (см. [48]), уравнения (1.18)–(1.19) можно переписать в более удобной форме.

Образуем пару комплексных функций:

$$z(w, t) = x(w, t) + iy(w, t)$$

и

$$\Pi(u, t) = \Psi(u, t) + i\mathcal{H}[\Psi(u, t)],$$

где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w, t)$ и $V(w, t)$ по следующим формулам:

$$R(w, t) = \frac{1}{z_w},$$

и

$$V(w, t) = i \frac{\Pi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитичны в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$R(w, t) \rightarrow 1, \quad |w| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } w \leq 0,$$

$$V(w, t) \rightarrow 0, \quad |w| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } w \leq 0.$$

Как показано в работе [48], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$R_t = i(UR_w - U_w R), \tag{1.22}$$

$$V_t = i(UV_w - B_w R) + g(R - 1), \tag{1.23}$$

где

$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R),$$

$$B = P(V\bar{V}),$$

$$P = \frac{1}{2}(I + iH).$$

Эти уравнения называются уравнениями Дьяченко.

Уравнения (1.22)–(1.23) справедливы в нижней полуплоскости комплексной области, однако нас будут интересовать решения лишь на вещественной оси при $v = 0$. Приведем окончательную постановку задачи:

$$R_t(u, t) = i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)),$$

$$V_t(u, t) = i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) + g(R(u, t) - 1),$$

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T, \quad (1.24)$$

$$R(0, t) = R(2\pi, t), \quad V(0, t) = V(2\pi, t), \quad 0 < t < T,$$

$$R(u, 0) = R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Решая систему (1.24), получаем функции $R(u, t)$ и $V(u, t)$. Покажем как с помощью этих функций восстановить свободную поверхность и значение потенциала на свободной поверхности. Воспользуемся следующим представлением для функций R, V :

$$R(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)e^{-iku},$$

$$V(u, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)e^{-iku}.$$

Тогда для функции $\frac{1}{R}$ имеет место представление:

$$\frac{1}{R} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)e^{-iku}.$$

Значения коэффициентов c_k несложно получить рекуррентно из соотношения:

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-iku}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-iku}\right) = 1.$$

Умножением рядов можно получить разложение:

$$-i \frac{V(u, t)}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) e^{-iku}.$$

Теперь восстановим функцию $z(u, t)$ следующим образом:

$$z(u, t) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku},$$

а функцию $\Pi(u, t)$ по формуле:

$$\Pi(u, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} d_k(t) e^{-iku}.$$

Свободную поверхность получим как геометрическое место точек по следующему правилу:

$$\Gamma(t) = \{(\operatorname{Re} z(u, t), \operatorname{Im} z(u, t)) : u \in (0, 2\pi)\}.$$

Значение потенциала на свободной поверхности находится по формуле

$$\Psi(u, t) = \operatorname{Re} \Pi(u, t).$$

Упражнение 1.2. Получить первые коэффициенты c_k в разложении функции R .

В дальнейшем не раз убедимся, что уравнения (1.24) являются очень удобными для теоретического и численного анализа. Заметим, что вид этих уравнений получен в предположении бесконечно глубокой воды. Форму этих уравнений можно распространить на случай конечной глубины, однако получаемые при этом уравнения теряют многие «хорошие качества», в

частности, устойчивость вычислительного процесса при численном моделировании. Заметим также, что функции R и V хотя и полностью описывают динамику жидкости со свободной поверхностью, но не имеют прямого физического смысла, и как следствие законы сохранения (например, энергии) напрямую не могут быть записаны в переменных R, V . Хотя через переменные Ψ и z , которые также являются конформными, можно выписать законы сохранения энергии. Приведем эти формулы в следующем разделе.

1.6. Уравнения для конечной глубины

Перейдем к рассмотрению нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью и конечной глубиной.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью:

$$-\bar{h} < y < \eta(x, t),$$

$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, имеем

$$v(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t),$$

где $v(x, y, t)$ — двумерное поле скоростей; $\Phi(x, y, t)$ — потенциал. Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0.$$

С этим уравнением связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$\Phi_y|_{y=-\bar{h}} = 0,$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x),$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y).$$

Здесь g — ускорение поля тяжести.

Удобно ввести величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [12]). В.Е. Захаровым было установлено, что переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Psi},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\eta},$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$,

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\bar{h}}^{\eta(x,t)} |\nabla\Phi|^2 dy,$$

$$U = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x, t) dx.$$

Следуя работе [12], совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y) в полупространство в переменных (u, v) :

$$-\infty < u < \infty,$$

$$-h < v < 0.$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде:

$$y = y(u, t),$$

$$x = u + \tilde{x}(u, t).$$

Переменные $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны соотношением

$$y = R[\tilde{x}],$$

где оператор R — интегральный оператор вида:

$$R[f](u) = \frac{1}{2h} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{\sinh(\pi/2h(u' - u))} du'.$$

Обратный к R оператор T имеет вид:

$$T[f](u) = \frac{1}{h} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{1 - e^{-\pi/(h(u-u'))}} du'.$$

Как показано в работе [12], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$ полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегро-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных по времени:

$$y_t = -y_u T \left[\frac{R[\Psi_u]}{J} \right] + x_u \frac{R[\Psi_u]}{J}, \quad (1.25)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 - (R[\Psi_u])^2}{2J} - T \left[\frac{R[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u - gy, \quad (1.26)$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения.

Уравнения (1.25)–(1.26) будем рассматривать с периодическими гранич-

ными условиями. Пусть $u \in (0, 2\pi)$, а функции y, Ψ представлены в виде:

$$y(u, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) e^{iku},$$

$$\Psi(u, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t) e^{iku}.$$

Операторы R и T в фурье-представлении имеют простой вид:

$$y_k = R_k \tilde{x}_k, \quad R_k = i \tanh kh$$

$$\tilde{x}_k = T_k y_k, \quad T_k = -i \coth kh$$

Операция дифференцирования по переменной u в Фурье-представлении имеет обычный вид:

$$D_k = ik.$$

Для вычисления операторов R, T, D можно применять быстрое преобразование Фурье.

Упражнение 1.3. Показать, что при $h \rightarrow \infty$ операторы R и T стремятся (в каком смысле?) к операторам H и $-H$.

1.7. Уравнения, описывающие стационарные волны

Среди поверхностных волн наиболее исследованными являются стационарные волны. Приведем уравнения в конформных переменных, рассмотренных выше, для определения профиля стационарных волн.

Под стационарными, или бегущими, волнами будем понимать такие решения уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, которые могут быть записаны в форме:

$$f(u, t) = F(u - ct),$$

где c — скорость бегущей волны.

Параметрами для симметрических стационарных волн являются период, который будем считать равным $\frac{2\pi}{k}$, где k — целое число, и постоянная скорость стационарной волны, которую обозначим c .

Профиль стационарной волны будем искать в виде:

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nku.$$

Введем обозначение

$$S_n = \frac{1}{kn}.$$

Как показано в работе [12], коэффициенты a_n удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений с параметром λ :

$$(\lambda^2 - gS_1)a_1 = \frac{g}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{S_1(S_m + S_{m+1})}{S_m S_{m+1}}\right) a_m a_{m+1}, \quad (1.27)$$

$$(\lambda^2 - gS_n)a_n = \frac{g}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{S_n(S_m + S_{m+n})}{S_m S_{m+n}}\right) a_m a_{m+n} + \quad (1.28)$$

$$\frac{g}{4} \sum_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{S_n(S_m + S_{n-m})}{S_m S_{n-m}}\right) a_m a_{n-m}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Коэффициент a_0 вычисляется по формуле:

$$a_0 = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{S_n}. \quad (1.29)$$

Параметр λ связан со скоростью стационарной волны c следующим образом:

$$\lambda^2 = \left(1 - 2 \langle 1 - \frac{1}{|z_u|^2} \rangle\right) c^2, \quad (1.30)$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду.

После решения системы уравнений (1.27)–(1.29) находим y , а соответственно и $z = u - \mathbf{H}[y] + y$. Зная z и параметр λ можно из соотношения (1.30) найти скорость c .

После того как найден профиль стационарной волны, можно найти и значение потенциала на границе из формулы (см. [12]):

$$c y_u = H \Psi_u. \quad (1.31)$$

Как известно, решение системы (1.27)–(1.28) существует не для всех значений параметра. Еще в работах Стокса был получен результат о предельной волне. Им было показано, что при увеличении скорости стационарных гравитационных волн происходит заострение гребней и образуется угол, равный 120° .

Уравнения (1.27)–(1.29) представляют собой бесконечную систему нелинейных уравнений. Решения этих уравнений являются коэффициентами Фурье. В случае докритического значения скорости профиль поверхностной волны является аналитической функцией, и коэффициенты ряда Фурье стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью. Поэтому для приближенного решения уравнений (1.27)–(1.29) можно положить $a_n = 0$ при $n > N$ для достаточно большого значения N .

Уравнения (1.27)–(1.29) записаны в форме, удобной для решения итерационными методами, однако на этом пути возникают вычислительные трудности.

Глава 2

Разрешимость уравнений, описывающих динамику идеальной жидкости со свободной поверхностью

2.1. Шкалы функциональных пространств

Пусть $Q_s = \{w = u + iv : 0 < u < 2\pi, |v| < s\}$ — область в \mathbb{C} , $0 < s < \infty$. Введем шкалу банаховых пространств E_s следующим образом: пространство E_s состоит из сужений на Q_s функций аналитических в полосе $\{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} w| < s\}$, 2π -периодических по переменной u и вещественных при $v = 0$, с конечной нормой

$$\|f\|_{E_s} = \left(\sup_{|v| \leq s} \|f\|_{W_2^1(0, 2\pi)}^2 \right)^{1/2},$$

где $W_2^1(0, 2\pi)$ — пространство Соболева первого порядка. Для сокращения письма норму в пространстве E_s будем обозначать через $\|\cdot\|_s$.

Лемма 2.1. Пусть $f, g \in E_s$, тогда

$$fg \in E_s$$

и

$$\|fg\|_s \leq c\|f\|_s\|g\|_s.$$

Доказательство. Оценим норму $\|fg\|_s$:

$$\|fg\|_s^2 \leq \sup_{|v| \leq s} (\|fg\|_{L_2(0,2\pi)}^2 + \|f'g\|_{L_2(0,2\pi)}^2 + \|fg'\|_{L_2(0,2\pi)}^2).$$

Оценим отдельные слагаемые с помощью теоремы вложения Соболева:

$$\sup_{|v| \leq s} \|fg\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \leq c_1 \sup_{|v| \leq s} \|f\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \|g\|_{C[0,2\pi]}^2 \leq c_2 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично:

$$\sup_{|v| \leq s} \|f'g\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \leq c_3 \sup_{|v| \leq s} \|f'\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \|g\|_{C[0,2\pi]}^2 \leq c_4 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2,$$

$$\sup_{|v| \leq s} \|fg'\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \leq c_5 \sup_{|v| \leq s} \|f\|_{C[0,2\pi]}^2 \|g'\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \leq c_6 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2.$$

□

Лемма 2.2. Пусть f_1, f_2, g_1, g_2 принадлежат шару радиуса $M > 0$ в пространстве E_s . Тогда имеет место неравенство

$$\|f_1g_1 - f_2g_2\|_s \leq c(M)(\|f_1 - f_2\|_s + \|g_1 - g_2\|_s).$$

Доказательство. В силу леммы 2.1 имеем:

$$\begin{aligned} \|f_1g_1 - f_2g_2\|_s &= \|f_1g_1 - f_1g_2 + f_1g_2 - f_2g_2\|_s \leq \|f_1(g_1 - g_2)\|_s + \|(f_1 - f_2)g_2\|_s \leq \\ &c(M)(\|f_1 - f_2\|_s + \|g_1 - g_2\|_s). \end{aligned}$$

□

Рассмотрим оператор Гильберта, который, напомним, для периодических функций вводится следующим образом:

$$\mathbb{H}[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} f(u') \operatorname{ctg} \left(\frac{u' - u}{2} \right) du'.$$

Лемма 2.3. *Оператор Гильберта непрерывен в пространстве E_s и*

$$\|\mathbb{H}f\|_s = \|f\|_s$$

для любой $f \in E_s$.

Доказательство. Пусть $f \in E_s$, тогда для нормы $\|f\|_s$ имеем следующее представление:

$$\|f\|_s^2 = \sup_{|v| \leq s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^2 e^{2kv} |f_k|^2 \right),$$

где f_k суть коэффициенты Фурье. Поскольку

$$\mathbb{H}[e^{iku}] = i \operatorname{sign}(k) e^{iku},$$

то

$$\|\mathbb{H}f\|_s^2 = \sup_{|v| \leq s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^2 e^{2kv} |i \operatorname{sign}(k) f_k|^2 \right) = \|f\|_s^2.$$

□

Введем пространство \tilde{E}_s , состоящее из функций аналитических в области

$$\Pi = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : 0 < u < 2\pi, |v| < s\}$$

и 2π -периодических по переменной u со скалярным произведением:

$$(f, g)_{\tilde{E}_s} = \int_{\Pi} f(w) \overline{g(w)} dw.$$

Пространство \tilde{E}_s является гильбертовым пространством (см. теорему 1, гл. 1, [9]). Очевидно, что вложение $E_s \subset \tilde{E}_s$ является непрерывным. С другой стороны, для любых $s' > 0$ и $s > s'$ имеет место непрерывное вложение $\tilde{E}_s \subset E_{s'}$.

2.2. Существование и единственность решений

Распишем уравнения (1.24) в вещественной форме при $v = 0$. Пусть $R = R_1 + iR_2$, $V = V_1 + iV_2$, тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{R}_1 &= U'_1 R_2 + U'_2 R_1 - U_1 R'_2 - U_2 R'_1, \\ \dot{R}_2 &= U_1 R'_1 + U_2 R'_2 - U'_1 R_1 + U'_2 R_2, \\ \dot{V}_1 &= B'_1 R_2 + B'_2 R_1 - U_1 V'_2 - U_2 V'_1 + g(R_1 - 1), \\ \dot{V}_2 &= U_1 V'_1 + U_2 V'_2 - B'_1 R_1 + B'_2 R_2 + gR_2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где

$$U_1 = R_1 V_1 + R_2 V_2,$$

$$U_2 = \text{H}[R_1 V_1 + R_2 V_2],$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2),$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\text{H}[V_1^2 + V_2^2].$$

Запишем уравнения (2.1) в векторной форме. Через E_s^4 обозначим пространство $\prod_{l=1}^4 E_s$, где \prod означает прямое произведение пространств. Введем отображение $F : E_s^4 \rightarrow E_s^4$, порожденное правой частью уравнений (2.1). Введем обозначение $W = [R_1, R_2, V_1, V_2]^T$. Тогда имеем следующую запись уравнений:

$$\dot{W} = F(W).\tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) будем рассматривать с начальным условием

$$W(0) = W_0,\tag{2.3}$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned}
 R_{10} &= 1, \\
 R_{10} &= 0, \\
 V_{10} &= 0, \\
 V_{20} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

где $R_{10}, R_{20}, V_{10}, V_{20}$ суть коэффициенты Фурье функций R_1, R_2, V_1, V_2 , соответствующие $k = 0$.

Определение 2.1. Функция $W(t) = [R_1(t), R_2(t), V_1(t), V_2(t)]^T$ аналитичная на $[0, T)$ со значениями в E_s^4 , ($s > 0$) называется аналитическим решением задачи (2.2)–(2.4), если W удовлетворяет (2.2)–(2.4).

Теорема 2.1. Пусть $W_0 \in E_{s_1}^4$ и W_0 удовлетворяют условиям (2.4), тогда для любого $s_2 \in (0, s_1)$ существует $T = T(s_2)$ такое, что при $t \in (0, T)$ существует единственное аналитическое решение задачи (2.2)–(2.4).

Доказательство. Выберем произвольные s, s' такие, что $0 < s' < s < s_1$. Пусть $W_1, W_2 \in E_s^4$ и $\|W_1\|_{E_s^4} < M$, $\|W_2\|_{E_s^4} < M$. Покажем, что оператор F удовлетворяет условию

$$\|F(W_1) - F(W_2)\|_{E_{s'}^4} \leq c(M) \frac{\|W_1 - W_2\|_{E_s^4}}{s - s'}.
 \tag{2.5}$$

Функция $f \in E_s$ может быть представлена рядом Фурье

$$f(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikw},$$

тогда

$$f'(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik) f_k e^{ikw}.$$

Учитывая, что функция $\text{Im } f = 0$ при $v = 0$, имеем $f_k = \overline{f_{-k}}$. В силу оценки

$$k^2 e^{2|k|s} \leq \frac{e^2}{(s - s')^2} e^{2|k|s}$$

следует, что

$$\|f'\|_{s'} \leq c_1 \frac{\|f\|_s}{s - s'}.$$

Отсюда и из лемм 2.2, 2.3 следует (2.5).

Рассмотрим вспомогательную задачу относительно W_a в E_s^4

$$\dot{W}_a = F(W_a + W_0), \quad (2.6)$$

$$W_a(0) = 0. \quad (2.7)$$

В силу оценки (2.5) к задаче (2.6), (2.7) применима теорема Ниренберга-Нисиды (теорема, с. 220, [22]). Вследствие этой теоремы существует $T = T(s_2) > 0$ такое что при $t \in (0, T)$ существует единственное аналитическое решение задачи (2.6), (2.7). Тогда функция $W(t) = W_a(t) + W_0$ будет аналитическим решением задачи (2.2), (2.3). Нужно показать, что функция W удовлетворяет условию (2.4). По условию теоремы начальное условие W_0 удовлетворяет этому условию, с другой стороны, пусть $A \in E_s^4$, тогда для функции $B = F(A) \in E_{s'}^4$ имеет место:

$$B_{10} = 0,$$

$$B_{20} = 0,$$

$$B_{30} = 0,$$

$$B_{40} = 0.$$

Следовательно, функция W удовлетворяет условию (2.4). □

В приложениях при численном моделировании удобно работать с решениями на вещественной оси в пространствах Соболева. Пусть $Q = (0, 2\pi) \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ — прямоугольник в \mathbb{R}^2 . Следствием теоремы 2.1 является следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть $[R_1, R_2, V_1, V_2]^T$ — аналитическое решение при $t \in [0, T]$, тогда при $v = 0$ $R_1, R_2, V_1, V_2 \in W_2^k(Q)$ для любого $k \geq 1$.

Упражнение 2.1. Привести подробное доказательство теоремы 2.2.

2.3. Минимальная гладкость решений

В настоящей главе были изучены аналитические решения задачи (1.24). В этом параграфе будем предполагать минимальные требования на начальную функцию. Соответственно, дадим более общее (менее гладкое) определение решения задачи (1.24). Заметим, что теоремы о корректной разрешимости задачи (1.24) требуют существенной гладкости (аналитичности) от начального условия. С другой стороны, для обоснования численных схем полезно рассматривать решения с меньшей гладкостью.

Будем рассматривать пространство Соболева с периодическими условиями $\widetilde{W}_4^1(0, 2\pi)$. Это пространство получено пополнением функций

$$\{f \in C^1[0, 2\pi] : f(0) = f(2\pi)\}$$

по норме пространства $W_4^1(0, 2\pi)$

$$\|f\|_{W_4^1(0, 2\pi)} = \left(\int_0^{2\pi} (|f(x)|^4 + |f'(x)|^4) dx \right)^{1/4}.$$

Введем функционал невязки для задачи (1.24):

$$J(R, V) = \|R_t - i(UR_u - U_u R)\|_{L_1(Q)} + \|V_t - i(UV_u - B_u R) - g(R - 1)\|_{L_1(Q)} +$$

$$\|R|_{t=0} - R_0\|_{L_1(0, 2\pi)} + \|V|_{t=0} - V_0\|_{L_1(0, 2\pi)},$$

где функции U и B определены по формулам:

$$U = \frac{1}{2}(I + iH)(R\bar{V} + \bar{R}V),$$

$$B = \frac{1}{2}(I + iH)(V\bar{V}).$$

Лемма 2.4. Функционал J непрерывен на $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$.

Доказательство. Пусть $R^k, V^k \in \widetilde{W}_4^1(Q)$, $R^k \rightarrow R$, $V^k \rightarrow V$ в $\widetilde{W}_4^1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$. В силу непрерывности оператора дифференцирования $D_t : \widetilde{W}_4^1(Q) \rightarrow L_1(Q)$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_t^k - R_t\|_{L_1(Q)} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|V_t^k - V_t\|_{L_1(Q)} = 0.$$

Пусть

$$W^k = \overline{R}^k V^k + \overline{V}^k R^k$$

и

$$W = \overline{R}V + \overline{V}R.$$

Эти функции принадлежат гильбертову пространству $\widetilde{W}_2^1(Q)$. В силу непрерывности операторов дифференцирования

$$D_t : \widetilde{W}_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q)$$

и

$$D_u : \widetilde{W}_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q),$$

теоремы Лебега о предельном переходе и неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|W^k - W\|_{\widetilde{W}_2^1(Q)}^2 = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q (|W^k - W|^2 + |D_t W^k - D_t W|^2 + |D_u W^k - D_u W|^2) du dt = 0. \end{aligned}$$

Представим функцию W^k в виде:

$$W^k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^k(t) e^{imu},$$

где ряд сходится в пространстве $\widetilde{W}_2^1(Q)$. Применяя к W^k оператор P , видим, что

$$U^k = \frac{1}{2}c_0^k(t) + \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m^k(t)e^{imu}.$$

Линейный оператор P непрерывен в пространстве $\widetilde{W}_2^1(Q)$, поэтому $U^k \rightarrow U$ в $\widetilde{W}_2^1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$.

Поскольку

$$\|U^k R_u^k\|_{L_1(Q)} \leq \|U^k\|_{L_2(Q)} \|R_u^k\|_{L_2(Q)},$$

$$\|U_u^k R^k\|_{L_1(Q)} \leq \|U_u^k\|_{L_2(Q)} \|R^k\|_{L_2(Q)},$$

то

$$U^k R_u^k \rightarrow U R_u,$$

$$U_u^k R^k \rightarrow U_u R$$

в $L_1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$.

Аналогично доказывается, что

$$U^k V_u^k \rightarrow U V_u,$$

$$B_u^k R^k \rightarrow B_u R$$

в $L_1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$. □

Определение 2.2. Пару функций $R^*, V^* \in \widetilde{W}_4^1(Q)$ назовем решением задачи (1.24), если $J(R^*, V^*) = 0$.

Легко видеть, что аналитическое решение задачи (1.24) является и решением в смысле определения 2.2.

Упражнение 2.2. Показать, что аналитическое решение задачи (1.24) является решением в смысле определения 2.2.

2.4. Описание абстрактного проекционного метода

Система (1.24) является эволюционной системой интегродифференциальных уравнений, разрешенной относительно производных по времени. Рассматриваемая система представляет собой бесконечномерную систему. Как правило, непосредственное нахождение решений таких систем нам недоступно. Поэтому будем изучать системы этих уравнений с помощью аппроксимации бесконечномерных систем, конечномерными системами, которые представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получаемые при этом нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно исследовать, численно находя приближенные решения. В настоящей работе изучаются методы, позволяющие делать доказательные выводы об исходной системе, наблюдая приближенные решения.

Рассмотрим постановку абстрактной задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве.

Пусть H, V являются комплексными банаховыми пространствами. Предположим, что имеет место непрерывное вложение $V \subset H$. Будем предполагать, что пространства H и V являются сепарабельными.

Введем непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор

$$A : V \rightarrow H.$$

Будем рассматривать абстрактную задачу Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве H :

$$h_t(t) = Ah(t), \quad t > 0 \tag{2.8}$$

$$h(0) = \varphi, \quad \varphi \in V.$$

Определение 2.3. Функция $h \in C^1([0, T]; V)$, удовлетворяющая (2.8), называется решением задачи (2.8) на отрезке $[0, T]$.

В настоящей главе не изучается вопрос о существовании и единственности решений задачи (2.8). Разумеется, для произвольного оператора A и начального условия $\varphi \in V$ задача может не иметь решений или иметь не единственное решение. Чтобы гарантировать существование и единственность решений задачи (2.8), необходимо накладывать дополнительные условия на оператор A . В главе 2 использовалась теорема Ниренберга-Нисиды.

Характерным случаем при изучении уравнений вида (2.8) является существование единственного решения на достаточно малом временном интервале. При этом время существования решения не может быть получено из абстрактных теорем, гарантирующих существование решений.

Рассмотрим абстрактный проекционный метод сведения системы уравнений (2.8) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предположим, что для любого $N > 0$ существует N -мерное подпространство $H^N \subset H$ такое, что $H^N \subset W$, где W — банахово пространство, компактно вложенное в V . Через $P_N : H \rightarrow H^N$ обозначим проектор. Предположим, что конечномерные пространства H^N выбраны так, что для любого $\psi \in W$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(I - P_N)\psi\|_H = 0. \quad (2.9)$$

Рассмотрим конечномерную аппроксимацию для задачи (2.8) для функции $h^N \in H^N$:

$$h_t^N(t) = P_N A h^N(t), \quad t > 0 \quad (2.10)$$

$$h^N(0) = P_N \varphi.$$

Задача (2.10) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений N -го порядка. Действительно, функция $h^N(t)$

принадлежит конечномерному пространству H^N при фиксированном t . Поскольку в конечномерном пространстве можно ввести базис, обозначим для пространства H^N базис через $\{e_1^N, e_2^N, \dots, e_N^N\}$. Поскольку мы не предполагали, что пространство является гильбертовым, то базисные элементы e_k^N , вообще говоря, зависят от N . Поэтому для функции h^N имеет место следующее представление:

$$h^N(t) = \sum_{k=1}^N h_k^N(t) e_k^N.$$

Следовательно, функция h^N полностью задается набором числовых функций:

$$\{h_1^N(t), h_2^N(t), \dots, h_N^N(t)\}.$$

В дальнейшем задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается численно, как правило, стандартными методами, например методами Рунге-Кутты. Для нелинейных задач имеет смысл пользоваться явными и одношаговыми методами. Эти методы требуют вычисления лишь правых частей уравнения (2.10), без необходимости решать системы (линейных или нелинейных) алгебраических уравнений.

2.5. Обоснование абстрактного проекционного метода

Доказывать сходимость приближенных решений, полученных с помощью проекционного метода, будем в предположении существования решения основной задачи (2.8). Последняя оговорка принципиальна, поскольку наш приближенный метод не позволяет доказывать существование решений исходной системы.

Теорема 2.3. *Предположим, что на отрезке $[0, T]$ существует единственное решение h задачи (2.8) такое, что $h(t) \in W$ при $t \in [0, T]$.*

Пусть также на отрезке $[0, T]$ существуют единственные решения h^N задачи (2.10) при всех $N > 0$ такие, что h^N принадлежат ограниченному множеству пространства W .

Тогда приближенные решения h^N сходятся к решению h в пространстве $C([0, T]; H)$, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|h^N - h\|_{C([0, T]; H)} = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Введем функционал невязки для задачи (2.8) следующим образом:

$$J(h) = \|h(t) - \varphi - \int_0^t Ah(s)ds\|_{C([0, T]; H)}.$$

Этот функционал определен на всем $C([0, T]; V)$, и несложно показать, что он является непрерывным на этом пространстве. При этом легко видеть, что если h^* — решение задачи (2.8), то $J(h^*) = 0$. В дальнейшем покажем и обратное: если для некоторого $h \in C([0, T]; V)$ функционал $J(h) = 0$, то функция h является решением задачи (2.8).

Последовательность $h^N(t)$ лежит в ограниченном множестве пространства W при всех $t \in [0, T]$. Поскольку пространство W компактно вложено в V , то в силу обобщенной теоремы Арцела (теорема 7, гл. 2, [14]) последовательность h^N является предкомпактной в пространстве $C([0, T]; V)$, и, следовательно, из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность h^{N_m} , сходящуюся в V . Обозначим предел этой подпоследовательности через h^* . В силу непрерывности функционала J имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} J(h^{N_m}) = J(h^*)$. Покажем, что $J(h^*) = 0$. Действительно, имеем

$$J(h^{N_m}) = \max_{t \in [0, T]} \|h^{N_m}(t) - \varphi - \int_0^t Ah^{N_m}(s)ds\|_H =$$

$$\|P_{N_m}\varphi - \varphi + \int_0^t P_{N_m}Ah^{N_m}(s)ds - \int_0^t Ah^{N_m}(s)ds\|_H \leq$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|P_{N_m}\varphi - \varphi\|_H + \max_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t (P_{N_m}Ah^{N_m}(s) - Ah^{N_m}(s))ds \right\|_H.$$

Оценим второе слагаемое

$$\max_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t (P_{N_m}Ah^{N_m}(s) - Ah^{N_m}(s))ds \right\|_H =$$

$$\max_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t ((I - P_{N_m})Ah^{N_m}(s))ds \right\|_H \leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^t \|(I - P_{N_m})Ah^{N_m}(s)\|_H ds.$$

Поскольку $Ah^{N_m}(t)$ принадлежит ограниченному множеству в H , то равномерно по $t \in [0, T]$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(I - P_{N_m})Ah^{N_m}(t)\|_H = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(h^{N_m}) = 0.$$

Покажем, что если $J(h^*) = 0$, то h^* есть решение задачи (2.8). Действительно, имеем

$$h^*(t) = \int_0^t Ah^*(s)ds + \varphi. \quad (2.12)$$

В правой части у нас функция, непрерывно дифференцируемая по t со значениями в V , следовательно, функция $h^*(t)$ принадлежит пространству $C^1([0, T]; V)$. Дифференцируя (2.12), видим, что h^* удовлетворяет уравнению (2.8). Непосредственно проверяется, что $h^*(0) = \varphi$.

Покажем теперь, что и сама последовательность $\{h^N\}$ сходится к h^* . В самом деле, имеем

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \|h^N - h^*\|_{C([0, T]; H)} \geq 0.$$

Пусть

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|h^N - h^*\|_{C([0, T]; H)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|h^{N_p} - h^*\|_{C([0, T]; H)}.$$

В силу компактности вложения

$$C^1([0, T]; V) \subset C([0, T]; H)$$

можем считать, что h^{N_p} сходится к некоторой функции v^* . Рассуждениями, аналогичными выше, получаем, что v^* является решением задачи (2.8).

Однако согласно предположению задача (2.8) имеет единственное решение, следовательно, $v^* = h^*$. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|h^N - h^*\|_{C([0, T]; H)} = 0.$$

□

Теорема 2.3 содержит различные условия, которые могут показаться абстрактными и труднопроверяемыми, однако в случае задачи (1.24) в силу теоремы 2.1 эти условия выполнены.

Упражнение 2.3. Проверить условия теоремы 2.3 для уравнения нелинейного переноса с периодическими краевыми условиями:

$$u_t + uu_x = 0.$$

2.6. Случай шкалы гильбертовых пространств

Абстрактные эволюционные уравнения часто рассматриваются в шкалах пространств. В частности, к этому случаю относятся уравнения, для которых выполнена теорема Ниренберга-Нисиды. Наша система уравнений (1.24) тоже может быть рассмотрена в шкалах гильбертовых пространств.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши уравнения в гильбертовых шкалах и соответствующую конечномерную аппроксимацию.

Пусть теперь H_0 — сепарабельное гильбертово пространство. Зафиксируем ортонормированный базис e_k . Тогда для элемента $u \in H_0$ через $\{u_k\}$ будем обозначать коэффициенты Фурье по базису $\{e_k\}$. Следовательно, имеем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \quad u_k = (u, e_k)_{H_0}.$$

Построим шкалу гильбертовых пространств H_s , $s \geq 0$ следующим образом:

$$H_s = \{u \in H_0 : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 e^{2sk} < \infty\}.$$

Скалярное произведение в H_s введем по формуле:

$$(u, v)_{H_s} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \bar{v}_k e^{2sk}.$$

Будем рассматривать функции числового аргумента со значениями в H_s . Введем соответствующие пространства. Через $C^k([0, T]; H_s)$, $0 < T < \infty$ обозначим пространство k -раз непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций со значениями в H_s с нормой:

$$\|u\|_{C^k([0, T]; H_s)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H_s} + \sum_{m=1}^k \max_{t \in [0, T]} \|u^{(m)}(t)\|_{H_s}.$$

Через $C^0([0, T]; H_s) = C([0, T]; H_s)$ будем обозначать непрерывные на $[0, T]$ функции. Очевидно, что функцию $u \in C([0, T]; H_s)$ можно представить в виде:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k,$$

где $u_k(t)$ суть непрерывные на $[0, T]$ числовые функции.

Рассмотрим, вообще говоря, нелинейный оператор A , определенный в шкале H_s . Будем предполагать, что оператор $A : H_s \rightarrow H_{s'}$ непрерывен при любых $s > s' > 0$.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши:

$$\dot{u}(t) = Au(t), \quad t > 0 \quad (2.13)$$

$$u(0) = \varphi \in H_0. \quad (2.14)$$

Определение 2.4. Функция $u \in C^1([0, T]; H_s)$, $s > 0$ называется s -решением.

Для гарантирования существования s -решения необходимо накладывать дополнительные условия на оператор A . Заметим, что необходимым условием существования s -решения является условие $\varphi \in H_s$. Задача (2.13)–(2.14) в шкалах пространств рассматривалась в работах многих авторов: Т. Нисида, Л. Ниренберг, Ф. Трев, Л.В. Овсянников и др., см. [41], [22], [23], [44]. В частности, были получены условия, гарантирующие существование решений на достаточно малом временном интервале.

Конечномерные аппроксимации u^N , рассматриваемые в предыдущем разделе, могут быть получены проекционным методом. Опишем этот метод. Пусть H_0^N — N -мерное пространство, порожденное линейными комбинациями элементами $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$. Через $P_N : H_0 \rightarrow H_0^N$ будем обозначать проектор $P_N \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k$. В дальнейшем без оговорок будем подразумевать вложение $H_0^N \subset H_0$.

Для фиксированного $N > 0$ будем рассматривать задачу относительно $u^N(t) = \sum_{k=1}^N u_k^N(t) e_k$:

$$\dot{u}^N(t) = P_N A u^N(t), \quad t > 0 \quad (2.15)$$

$$u^N(0) = P_N \varphi. \quad (2.16)$$

Поскольку функция u^N полностью определяется набором числовых функций $(u_1^N(t), \dots, u_N^N(t))^T$, то задачу (2.15)–(2.16) можно переписать в виде системы N -го порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений

относительно $(u_1^N(t), \dots, u_N^N(t))^T$. Введем множество $M_{q,s}^N \subset \mathbb{C}^N$ при $q > 0$, $s > 0$ следующим образом:

$$M_{q,s}^N = \{(u_1^N, \dots, u_N^N) \in \mathbb{C}^N : |u_k^N| \leq qe^{-sk}\}.$$

Будем предполагать, что q и s_1 выбраны так, что

$$P_N \varphi \in \text{int}M_{q,s_1}^N,$$

где через $\text{int}M_{q,s_1}^N$ обозначена внутренность множества M_{q,s_1}^N .

Рассмотрим отображение $F^N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, задаваемое правой частью уравнения (2.15):

$$(F^N((\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T))_i = (A(\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k), e_i)_H.$$

Будем предполагать, что функция F^N удовлетворяет условию Липшица на множестве M_{q,s_1}^N . Это предположение гарантирует существование единственного решения задачи Коши (2.15)–(2.16) в M_{q,s_1}^N .

Покажем, что схема аппроксимации для уравнений в гильбертовых шкалах включается в схему конечномерной аппроксимации, описанную в параграфах 2.4, 2.5.

Пусть начальное условие в задаче (2.13)–(2.14) принадлежит пространству H_{s_1} , где $s_1 > 0$. Пусть выбрано положительное число s_2 такое, что $s_1 > s_2 > 0$. В качестве пространства H возьмем пространство H_0 , за пространство V примем пространство H_{s_2} , а в качестве пространства W выберем пространство H_{s_1} . Наша гильбертова шкала H_s является компактной шкалой, т.е. для любых $s_1 > s_2 > 0$ вложение

$$H_{s_1} \subset H_{s_2}$$

является компактным. Это следует из критерия компактности в пространстве l_2 , (см. [18], с. 248). Таким образом, видим, что тройка пространств

H_0, H_{s_2}, H_{s_1} соответствует тройке H, V, W в обозначениях параграфов 2.4, 2.5.

Глава 3

Численные методы

3.1. Применение проекционного метода

Опишем проекционный метод для задачи (1.24) с использованием рядов Фурье. Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде:

$$R^N(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N r_k^N(t) e^{-iku}, \quad (3.1)$$

$$V^N(u, t) = \sum_{k=1}^N v_k^N(t) e^{-iku}.$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье (3.1) имеет существенные преимущества. Действительно, пусть

$$f = \sum_{k=0}^N f_k e^{-iku},$$

тогда

$$f_u = \sum_{k=1}^N (-ik) f_k e^{-iku}.$$

Еще более эффективно вычисляется оператор P . Для

$$g = \sum_{k=-N}^N g_k e^{-iku}$$

имеем

$$P[g] = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^N g_k e^{-iku}.$$

Поскольку операция умножения функций не является замкнутой в классе функций (3.1), введем бинарную операцию «*», которая является замкнутой для множества функций вида (3.1). Пусть

$$A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku},$$

$$B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}.$$

Тогда для $C = AB$ имеем

$$C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}.$$

Операцию «*» введем следующим образом:

$$A * B = \sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku},$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции C .

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений:

$$R_t^N = i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \tag{3.2}$$

$$V_t^N = i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1),$$

где

$$U^N = P(V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N),$$

$$B = P(V^N * \bar{V}^N).$$

Покажем, что описанный метод укладывается в схему, рассмотренную в разделах 2.4, 2.5. Для этого будем пользоваться шкалами банаховых пространств, введенных в разделе 2.1. Пусть начальные условия принадлежат

пространству $E_{s_1}^4$, тогда выберем любое s_2 из интервала $(0, s_1)$. В качестве пространства H возьмем E_0^4 , в качестве V — пространство $E_{s_2}^4$. По определению шкалы E_s^4 функции из пространства E_s^4 могут быть представлены рядами Фурье. Следовательно, за проекционный оператор P_N возьмем оператор проектирования на конечные суммы рядов Фурье по тригонометрическим базисным функциям e^{iku} . Именно такое проектирование использовано в 3.2. Наконец, в качестве пространства W возьмем пространство $E_{s'}^4$, где $s_2 < s' < s_1$. Чтобы гарантировать, что функции $h^N(t)$ остаются в ограниченном множестве пространства W при всех $t \in (0, T)$, будем требовать, чтобы приближенные решения удовлетворяли условиям типа:

$$|r_k^N(t)| \leq M e^{-2s'k},$$

$$|v_k^N(t)| \leq M e^{-2s'k},$$

где $M > 0$. Заметим, что при практическом применении проекционного метода следить за этими условиями нет необходимости, поскольку случай выхода решения из шкалы E_s^4 будет легко обнаружен в ходе вычислений.

3.2. Применение теории регуляризации

Рассмотренный проекционный метод является наиболее эффективным для решения системы уравнений (1.24). Принципиальным для доказательства сходимости проекционного метода было использование базиса Фурье. Однако использование рядов Фурье (дискретного преобразования Фурье) имеет недостатки. Во-первых, для эффективного вычисления прямого и обратного дискретного преобразования Фурье (в том числе и с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье) мы вынуждены использовать только равномерную сетку по переменной u . Во-вторых, сходимость

рядов Фурье очень чувствительна к гладкости функций. Поэтому образование особенности даже в одной точке влечет за собой необходимость существенного увеличения количества коэффициентов Фурье, участвующих в расчете. Методы дискретизации на основе тригонометрических рядов Фурье практически не применимы для исследования режимов образования особенностей у решений.

В настоящем пункте дадим обоснование абстрактного метода дискретизации для задачи (1.24). На основании изложенных ниже теорем в следующем пункте рассмотрим численный метод с использованием кубических сплайнов для дискретизации по переменной u . Методы сплайн-приближения могут быть эффективными при численном исследовании задач на неравномерной сетке.

Доказательство сходимости приближенной схемы будем проводить методом минимизации невязки. При этом будут использоваться результаты теории регуляризации А.Н. Тихонова некорректных задач. В дальнейшем будем предполагать существование и единственность гладкого решения задачи (1.24).

Предположение 3.1. Пусть R_0, V_0 таковы, что существует единственное решение задачи (1.24), обозначаемое R^*, V^* , где R^* и V^* принадлежат $\widetilde{W}_2^2(Q)$.

Введем функционал

$$\Omega(R, V) = \|R\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)}^2 + \|V\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)}^2,$$

определенный на всем $\widetilde{W}_2^2(Q)$.

Лемма 3.1. *Функционал Ω является стабилизатором для задачи (1.24), т. е. выполнены следующие условия:*

1) $\Omega(R, V) \geq 0$;

2) множество $\Omega_M = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq M\}$ является предкомпактным в $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$, т. е. из любой последовательности из Ω_M можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$;

3) R^*, V^* принадлежат области определения Ω .

Доказательство. Пункт 1) следует из определения Ω , пункт 2) следует из теоремы Реллиха—Кондрашова о компактности вложения пространств Соболева [26], пункт 3) следует из предположения 3.1. \square

Приведем абстрактную приближенную схему, а потом рассмотрим способы ее конструктивной реализации.

Обозначим $\Omega^* = \Omega(R^*, V^*)$. Введем две числовые последовательности $\alpha_k > 0, \beta_k > 0, \alpha_k \rightarrow 0, \beta_k \rightarrow 0$. Введем множество:

$$\Omega_k = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq \Omega^* + \beta_k\}.$$

Последовательность $\{R_k, V_k\}$ будем определять из условий:

$$J(R_k, V_k) \leq J_k^* + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где $J_k^* = \inf_{\Omega_k} J(R, V)$.

Теорема 3.1. Пусть выполнено предположение 3.1, тогда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(R_k, V_k) = 0$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_k - R^*\|_{\widetilde{W}_4^1(Q)} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|V_k - V^*\|_{\widetilde{W}_4^1(Q)} = 0.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 1, § 7, гл. 2 [7].

□

Схема (3.3) является не вполне конструктивной, поскольку неизвестно значение Ω^* . Тем не менее существуют конструктивные методы реализации этой схемы (см. п. 3, § 7, гл. 2 [7]). Для удобства читателя приведем такую схему, следуя изложению [7], для задачи (3.3).

Будем предполагать, что известно такое число M , что $\Omega(R^*, V^*) \leq M$. В качестве начального приближения произвольно зададим число $\gamma_0 > 0$ и функции $R_0, V_0 \in \widetilde{W}_2^2(Q)$. Пусть уже сделано $n - 1$ шагов и найдены γ_{n-1} и $R_{n-1}, V_{n-1} \in \widetilde{W}_2^2(Q)$. Положим $\gamma_n = 2^{-1}\gamma_{n-1}$, а R_n, V_n найдем как решение следующей экстремальной задачи:

$$J^* = \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(R_n, V_n) \leq J^* + \gamma_n,$$

где $(R_n, V_n) \in \Omega_M$, $\Omega_M = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq M\}$.

Далее проверяем неравенство:

$$J(R_n, V_n) > \gamma_n. \tag{3.4}$$

Если неравенство (3.4) не выполнено, то повторяем процесс. Как показано в [7], неравенство (3.4) выполнится обязательно, если только $\Omega^* \neq 0$. Случай $\Omega^* = 0$ соответствует тривиальному решению, которое невозможно в задаче (1.24).

Итак, пусть при $n = N_0$ выполнено неравенство (3.4). Дальнейшие приближения будем искать с помощью другого итерационного процесса. Положим:

$$\omega_{0,n} = 2^{-n}M,$$

$$\gamma_{0,n} = 2^{-(n+1)}\gamma_{N_0}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\Omega_{0,n} = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) < \omega_{0,n}\}.$$

Найдем $R_{0,n}, V_{0,n}$ и $\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}$ как решения задач:

$$J_{0,n}^* = \inf_{\Omega_{0,n}} J(R, V) \leq J(R_{0,n}, V_{0,n}) \leq J_{0,n}^* + \gamma_{0,n},$$

$$J_M^* = \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}) \leq J_M^* + \gamma_{0,n},$$

и при каждом $n = 0, 1, \dots$ будем проверять неравенство

$$J(R_{0,n}, V_{0,n}) - J(\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}) > \gamma_{0,n}.$$

Известно (см. [7]), что найдется такой номер n_k ($k = 0$), что это неравенство выполнится.

Положим $\omega_k = \omega_{k,n_k}$, $\gamma_k = \gamma_{k,n_k}$, $R_k = R_{k,n_k}$, $V_k = V_{k,n_k}$. Следующие шаги повторяются со значениями ω_{k+1} и γ_{k+1} :

$$\begin{cases} \omega_{k+1,n} = \omega_k + (M - \omega_k)2^{-n}, \\ \gamma_{k+1,n} = \gamma_k 2^{-(n+1)}, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.5)$$

Положим $\Omega_{k,n} = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq \omega_{k,n}\}$; при фиксированном k найдем $R_{k,n}, V_{k,n}, \tilde{R}_{k,n}, \tilde{V}_{k,n}$, такие, что:

$$\begin{aligned} J_{k,n}^* &= \inf_{\Omega_{k,n}} J(R, V) \leq J(R_{k,n}, V_{k,n}) \leq J_{k,n}^* + \gamma_{k,n}, \\ J_M^* &= \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(\tilde{R}_{k,n}, \tilde{V}_{k,n}) \leq J_M^* + \gamma_{k,n}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

и при каждом $n = 0, 1, \dots$ будем проверять неравенство:

$$J(R_{k,n}, V_{k,n}) - J(\tilde{R}_{k,n}, \tilde{V}_{k,n}) > \gamma_{k,n}.$$

После того как будет найден n_k , пересчитываем по схеме (3.5)–(3.6). Последовательность R_k, V_k сходится к решению в смысле теоремы 3.1.

Нами была описана схема для вычисления приближенного решения. Однако эта схема требует находить условный экстремум функционала, что

является технически сложной задачей. Сейчас опишем эффективную реализацию решения задачи (3.6). Для этого будем использовать аппроксимацию решения гладкими сплайнами.

Пусть в области Q задан конечный набор несовпадающих точек x_1, x_2, \dots, x_N , и в каждой точке x_i задано число y_i . Поставим задачу отыскания интерполяционных сплайн-функций $\sigma \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ из условия:

$$\min_{\sigma(x_i)=y_i} \left\{ \int_Q (|\sigma_{uu}|^2 + 2|\sigma_{ut}|^2 + |\sigma_{tt}|^2) du dt \right\}. \quad (3.7)$$

Задача (3.7) имеет единственное решение, более того, существуют очень эффективные методы построения сплайна σ по набору точек $\{(x_i, y_i)\}$ (см. [6], [1]).

Для каждого $N > 0$ зафиксируем определенную систему точек $S_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \overline{Q}$ таким образом, чтобы S_N образовывала ε_N -сеть, $\varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Через Θ_N обозначим множество всех сплайн-функций, построенных на сетке S_N . По определению $\Theta_N \subset \widetilde{W}_2^2(Q)$. Введем отображение $Q_N : \widetilde{W}_2^2(Q) \rightarrow \Theta_N$ по следующему правилу: функция из $\widetilde{W}_2^2(Q)$ сужается на сетку S_N , что возможно в силу теоремы вложения Соболева, а затем строится сплайн по правилу (3.7). Для любой функции $f \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ имеет место: (см. § 4.3 [6])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - Q_N f\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)} = 0. \quad (3.8)$$

Функциональное пространство Θ_N является конечномерным, а следовательно, пригодным для проведения вычислений. Покажем, что с помощью аппарата сплайнов можно осуществить аппроксимацию экстремальных задач.

Рассмотрим задачу поиска минимизирующей последовательности для

задачи

$$\inf_{\widetilde{W}_2^2(Q)} J(R, V) = 0. \quad (3.9)$$

Введем последовательность конечномерных задач

$$I_N^* = \inf_{\Theta_N} J(R, V), \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Теорема 3.2. *Последовательность задач (3.10) аппроксимирует задачу (3.9) по функции, т. е.*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^* = 0.$$

Доказательство. Пусть $R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q)$, тогда в силу леммы 2.4 и (3.8) имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (J(Q_N(R), Q_N(V)) - J(R, V)) = 0.$$

Из этого равенства по теореме 1.1, гл. 3 [7] следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^* = 0.$$

□

Решение задачи (3.10) при фиксированном N может быть эффективно найдено следующим образом. Сначала находим с помощью разностных методов решение задачи (1.24) (см. [12]), а затем по значениям в узлах сетки строим сплайн. Нужной точности решения задачи (3.10) всегда можно добиться выбором соответствующей сетки.

Итак, пусть найдено приближенное решение R_N, V_N задачи (3.9). Представим это приближенное решение в виде рядов:

$$R_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k(t) e^{iuk},$$

$$V_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v^k(t) e^{iuk}.$$

В схеме, описанной выше, нам нужно решать задачи типа (3.9) с ограничениями

$$\Omega(R_N, V_N) \leq M. \quad (3.11)$$

Если неравенство (3.11) не выполнено для решения задачи (3.9), тогда получим решение задачи (3.9), (3.11) с помощью операторов $T_M : \widetilde{W}_2^2(Q) \rightarrow \widetilde{W}_2^2(Q)$ по формуле:

$$T_M \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-iku} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k f_k e^{-iku},$$

где коэффициенты λ_k равны единице при малых $|k|$ и быстро убывают при больших $|k|$. В силу гладкости решений коэффициенты r^k, v^k убывают по соответствующим нормам достаточно быстро с ростом $|k|$. Следовательно, оператор T_M можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворить условию (3.11).

3.3. Регуляризация метода прямых в условиях машинной точности

Погрешности округлений при вычислениях являются принципиальной проблемой вычислительной математики. Одним из возможных способов преодоления трудностей проведения вычислений в условиях машинной точности является применение методов интервального анализа (см., например, [34], [13], [2]). Однако использование интервального исчисления требует специального программирования численных методов, снижает скорость вычислений и требует увеличения объема оперативной памяти. В настоящей работе предложен один простой и эффективный способ «борьбы» с особенностями машинной точности. Этот способ является одним из вариантов

спектрального фильтра. В то же время предлагаемый метод можно трактовать как регуляризацию некорректных задач по методу квазирешений. По сравнению с другими спектральными фильтрами этот метод является более эффективным в рассматриваемых задачах. Разумеется, предложенный подход может быть эффективным лишь в некоторых вычислительных задачах. В настоящей работе рассматривается применение численных методов для получения приближенных решений систем уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, где с помощью нашего подхода удалось получить важные результаты в задачах океанологии и математической гидродинамики.

Используем методы прямых для сведения уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная после дискретизации по пространственным переменным система обыкновенных уравнений решается стандартным методом Рунге-Кутты 4-го порядка. При вычислении правых частей этих уравнений используем методы быстрого преобразования Фурье, при реализации которых возникают основные погрешности вычислений. В рассматриваемых примерах мы сталкиваемся с вычислительной неустойчивостью, возникающей вследствие погрешностей округления. В настоящем разделе рассматриваем модификацию метода прямых, позволяющую в ряде случаев избежать вычислительной неустойчивости.

Рассматриваем применение к следующим задачам гидродинамики со свободной поверхностью: течение идеальной жидкости со свободной поверхностью с конечной глубиной и начальную стадию неустойчивости Релея-Тейлора, где рассматривается граница между тяжелой идеальной жидкостью и вакуумом в условии, когда жидкость находится над вакуумом. В начальный момент свободной поверхности придается возмущение и иссле-

дуются развитие релей-тейлоровской неустойчивости. Эта модель является классическим примером неустойчивости (см., например, [43]).

Необходимо отметить, что предлагаемый метод не в полной мере подавляет численную неустойчивость в задачах гидродинамики со свободной поверхностью, а лишь «продлевает жизнь» численной схеме.

Начнем с абстрактной постановки задачи. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим в H , вообще говоря, нелинейный оператор A , определенный на подпространстве $D \subset H$. Предположим, что в H можно выбрать ортонормированный в H базис $\{\varphi_k\} \subset D$.

Через $C^k([0, T]; H)$, $0 < T < \infty$ обозначим пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0, T]$ со значениями в H с нормой

$$\|u\|_{C^k([0, T]; H)} = \max_{t \in [0, T]} (\|u(t)\|_H + \|u^{(k)}(t)\|_H).$$

Будем рассматривать абстрактную задачу Коши:

$$u'(t) = A[u(t)], \quad t \in [0, T] \tag{3.12}$$

$$u(0) = \psi, \quad \psi \in H.$$

Определение 3.1. Функция $u \in C^1([0, T]; H)$ такая, что $u(t) \in D$ при $t \in [0, T]$ и удовлетворяющая (3.12), называется решением задачи (3.12).

Рассмотрим проекционный метод сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для задачи (3.12). Для конечного N введем проектор $P_N : H \rightarrow H$ по формуле

$$P_N \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k.$$

При фиксированном N будем рассматривать функцию $u^N(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^N(t) \varphi_k$,

где $\alpha_k^N \in C^1[0, T]$ являются решением задачи Коши:

$$(u^N)'(t) = P_N(A[u(t)]), \quad t \in [0, T] \quad (3.13)$$

$$u^N(0) = P_N\psi.$$

Функция u^N полностью определяется вектор-функцией $\alpha^N(t) = (\alpha_1^N(t), \dots, \alpha_N^N(t))^T$. Перепишем задачу (3.13) в виде системы N -го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений относительно α^N . Обозначим

$$F(\alpha^N) = (F_1(\alpha^N), \dots, F_N(\alpha^N))^T,$$

где

$$F_k(\alpha^N(t)) = (A[\sum_{i=1}^N \alpha_i^N(t)\varphi_i], \varphi_k)_H.$$

Будем рассматривать следующую систему уравнений, эквивалентную (3.13):

$$(\alpha^N)'(t) = F(\alpha^N(t)), \quad t \in [0, T] \quad (3.14)$$

$$\alpha^N(0) = \psi^N,$$

где

$$\psi^N = (\psi_1, \dots, \psi_N)^T,$$

$$\psi_k = (\psi, \varphi_k)_H.$$

Правую часть в уравнении (3.14) можно трактовать как функцию $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Приведем схему Рунге-Кутты 4-го порядка для системы (3.14). Через τ обозначим шаг по переменной t . Соответственно $t_m = m\tau$, $m = 0, \dots, M$. Будем предполагать, что на рассматриваемом интервале существует единственное решение задачи (3.14). Численные решения будем получать по

следующей формуле:

$$\begin{aligned}
 \alpha^N(t_m) &= \alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 k_1 &= F(\alpha^N(t_{m-1})), \\
 k_2 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{2}k_1), \\
 k_3 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{2}k_2), \\
 k_4 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \tau k_3), \\
 m &= 1, \dots, M.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

В реальности при вычислениях на ЭВМ по схеме (3.15), как правило, возникают ошибки в силу ограниченной машинной точности. Основным источником ошибок — вычисление функции F . Элементы вектора α^N трактуются как коэффициенты ряда Фурье, поэтому погрешности в вычислении этой функции могут повлечь катастрофические последствия для проведения расчетов. Типичной является ситуация, когда по модулю эти коэффициенты быстро стремятся к нулю. При этом приходится проводить вычисления с числами, по модулю значительно меньшими гарантированных значащих цифр. Вычисляя по схеме (3.15), наблюдаем значения $\tilde{\alpha}^N$, которые связаны с точными значениями следующим соотношением:

$$|\alpha^N(t_m) - \tilde{\alpha}^N(t_m)| = \delta_m^N, \quad m = 1, \dots, M.$$

Конкретные значения $\tilde{\alpha}^N(t_m)$ зависят от реализации счета по схеме (3.15). Мы будем говорить, что последовательность $\alpha^N(t_m)$ является вычислительно неустойчивой, если числовая последовательность δ_m^N не стремится к

нулю при $N \rightarrow \infty$. В этом случае относительная погрешность вычисления α^N быстро стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

В ситуации вычислительной неустойчивости мы не можем произвольно увеличивать число N , а должны согласовывать его с уровнем ошибок вычислений. Это стандартная ситуация в теории некорректных задач. Выбор размерности аппроксимирующей системы (числа N) оптимальным образом представляет собой трудную задачу. Предложим простой алгоритм, который позволит обеспечивать выбор N близким к оптимальному.

Пусть выбрано число $q > 0$. Введем функцию $R_q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ по формуле:

$$R_q(x_1, x_2, \dots, x_N) = (r_q(x_1), r_q(x_2), \dots, r_q(x_N)),$$

где

$$r_q(x) = \begin{cases} x, & |x| > q \\ 0, & |x| \leq q \end{cases}.$$

Величины α^N будем рассчитывать по формуле

$$\alpha^N(t_m) = R_q(\alpha^N(t_{m-1}) + \tau/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)). \quad (3.16)$$

Величины k_1, k_2, k_3, k_4 вычисляются согласно схеме (3.15). Выбор параметра $q > 0$ осуществляется из эмпирических соображений. Имеет смысл выбирать q на порядок больше, чем максимальное из значений δ_m .

Использование формулы (3.16) не вызывает сложности при программировании предлагаемой процедуры.

Покажем, что алгоритм, задаваемый формулой (3.16), является одной из реализаций метода квазирешений в теории регуляризации некорректных задач. Сделаем следующие предложения о разрешимости задач (3.12), (3.14).

Условие 3.1. Пусть существует $T > 0$ такое, что:

1. При $t \in [0, T]$ существует единственное решение задачи (3.12).
2. Решение задачи (3.12) принадлежит пространству $C^2([0, T]; D_1)$, где множество D_1 компактно в D .
3. Для достаточно больших N при $t \in [0, T]$ существует единственное решение задачи (3.13), и это решение принадлежит пространству $C^2([0, T]; D_1)$.

Методы, позволяющие проверить выполнение условий 3.1, получены в работах [32], [30].

Введем функционал невязки для задачи (3.12) по формуле

$$J(u) = \|u' - A[u]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u(0) - \psi\|_H^2.$$

Очевидно, что функционал $J : C^1([0, T]; D) \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывным. Функция $u \in C^1([0, T]; D)$ является решением задачи (3.12) тогда и только тогда, когда $J(u) = 0$.

В условии 3.1 задача нахождения приближенных решений задачи (3.12) может быть сведена к задаче нахождения последовательности u^l , минимизирующей функционал J на множестве $C^2([0, T]; D_1)$. Строить минимизирующую последовательность можно с помощью решений задачи (3.13).

Теорема 3.3. Пусть выполнено условие 3.1, тогда имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(u^N) = 0,$$

где u^N суть решения задачи (3.13). Более того, $\|u^N - u^*\|_{C^1([0, T]; D)} \rightarrow 0$, при $N \rightarrow \infty$, где u^* — решение задачи (3.12).

Доказательство. Подставим приближенные решения u^N в функционал невязки:

$$J(u^N) = \|(u^N)' - A[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u^N(0) - \psi\|_H^2 =$$

$$\begin{aligned} & \|(u^N)' - P_N A[u^N] - (I - P_N)A[u^N]\|_{C([0,T];H)}^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2 = \\ & \|(I - P_N)A[u^N]\|_{C([0,T];H)}^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в последней сумме стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим величину

$$\|(I - P_N)A[u^N]\|_{C([0,T];H)}^2 = \max_{t \in [0,T]} \sum_{k=N+1}^{\infty} |(A[u^N], \varphi_k)_H|^2. \quad (3.17)$$

Поскольку при всех $t \in [0, T]$ имеем $u^N(t) \in D_1$, то в силу компактности D_1 в D и непрерывности оператора $A : D \rightarrow H$ получаем, что множество $A[u^N(t)]$ ограничено в H равномерно по N и $t \in [0, T]$. Поэтому величина (3.17) также стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

В силу компактности вложения пространства $C^2([0, T]; D_1)$ в $C^1([0, T]; D)$ из последовательности u^N можно извлечь подпоследовательность u^{N_p} , сходящуюся в $C^1([0, T]; D)$. Легко видеть, что пределом этой подпоследовательности является единственное решение задачи (3.12) функция u^* . Действительно, из непрерывности функционала J следует, что $J(\lim_{N_i \rightarrow \infty} u^{N_i}) = \lim_{N_i \rightarrow \infty} J(u^{N_i}) = 0$. На самом деле и сама последовательность u^N сходится к u^* . Пусть $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];D)} = \lim_{N_q \rightarrow \infty} \|u^{N_q} - u^*\|_{C^1([0,T];D)}$. В силу компактности в $C^1([0, T]; D)$ подпоследовательности u^{N_q} можно считать, что эта подпоследовательность имеет пределом v^* . Но тогда v^* тоже будет решением задачи (3.12), а значит, имеем $v^* = u^*$. В итоге получаем, что $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];D)} = 0$. Следовательно, имеем $\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];D)} = 0$. \square

Теорема 3.3 является обоснованием известного в теории регуляризации некорректных задач метода квазирешений. В этой теореме рассматривается последовательность решений задач (3.13), однако вместо функций u^N ,

которые на практике недостижимы, можно рассматривать различные приближения в пространстве $C^2([0, T]; D_1)$. Эти приближения можно получать с помощью метода Рунге-Кутты (3.15) и подходящего метода интерполяции по переменной t .

Пусть фиксировано достаточно большое N . Через u^{NM} обозначим последовательность, полученную по схеме (3.15) по M точкам и последующим интерполированием с использованием стандартных кубических сплайнов по узлам $\{t_m\}$. Соответственно через u_q^{NM} , $q > 0$ обозначим аналогичную последовательность, полученную по схеме (3.16).

Теорема 3.4. Пусть выполнено условие 3.1. Предположим, что $u^{NM}, u_q^{NM} \in C^2([0, T]; D_1)$ и

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|u^{NM} - u^N\|_{C^2([0, T]; D_1)} = 0$$

при фиксированном N . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют N, M такие, что

$$J(u^{NM}) < \varepsilon,$$

также существуют, возможно, другие N, M и $q > 0$ такие, что

$$J(u_q^{NM}) < \varepsilon.$$

Доказательство. В силу теоремы 3.3 существует такой номер N_0 , что $J(u^N) < \varepsilon/2$ для всех $N \geq N_0$. Введем обозначение

$$\Delta^{NM} = u^{NM} - u^N.$$

Из предположений теоремы следует, что $\Delta^{NM} \in C^2([0, T]; D_1)$. Заметим, что по построению $u^{NM}(0) = u^N$. Имеем

$$\begin{aligned} J(u^{N_0 M}) &= J(u^{N_0} + \Delta^{N_0 M}) = \\ &\|(u^{N_0})' - A[u^{N_0} + \Delta^{N_0 M}] + (\Delta^{N_0 M})'\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u^{N_0}(0) - \psi\|_H^2 \leq \end{aligned}$$

$$\|(u^{N_0})' - A[u^{N_0} + \Delta^{N_0M}]\|_{C([0,T];H)}^2 + \|(\Delta^{N_0M})'\|_{C([0,T];H)}^2 + \|u^{N_0}(0) - \psi\|_H^2.$$

Поскольку

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|\Delta^{N_0M}\|_{C^2([0,T];D_1)} = 0,$$

и в силу непрерывности оператора $A : D \rightarrow H$ существует такое M_0 , что при всех $M \geq M_0$ имеем

$$\|(\Delta^{N_0M})'\|_{C([0,T];H)}^2 \leq \varepsilon/4,$$

$$|J(u^{N_0}) - \|(u^{N_0})' - A[u^{N_0} + \Delta^{N_0M}]\|_{C([0,T];H)}^2| \leq \varepsilon/4.$$

Следовательно, для всех $N > N_0$ и $M > M_0$ имеем

$$J(u^{NM}) \leq \varepsilon.$$

Пусть теперь N_1 и M_1 таковы, что $J(u^{N_1M_1}) < \varepsilon/2$. Обозначим

$$\Delta_q^{NM} = u_q^{NM} - u^{NM}.$$

По построению функций u_q^{NM} и в силу свойств кубических сплайнов имеем

$$\lim_{q \rightarrow 0} \|\Delta_q^{NM}\|_{C^2([0,T];D_1)} = 0.$$

Оценим значение функционала $J(u_q^{N_1M_1})$. В силу непрерывности функционала $J : C^1([0,T];D) \rightarrow \mathbb{R}$ существует такое $q_0 > 0$, что для всех $q < q_0$ имеем

$$|J(u^{N_1M_1}) - J(u_q^{N_1M_1})| = |J(u^{N_1M_1}) - J(u^{N_1M_1} + \Delta_q^{N_1M_1})| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, при всех $N > N_1$, $M > M_1$, $q < q_0$ выполнено

$$J(u_q^{NM}) \leq \varepsilon.$$

□

Теорема 3.4 дает возможность строить минимизирующую последовательность для функционала J с помощью приближений u_q^{NM} , которые можно строить конструктивно. А теорема 3.3 гарантирует, что минимизирующая последовательность сходится к решению задачи (3.12). В конкретных приложениях условия теорем 3.3, 3.4 часто могут быть легко проверены. В частности, в задачах гидродинамики со свободной поверхностью, которые мы рассматриваем, эти условия выполнены.

Численный эксперимент 1. Рассмотрим стоячие волны идеальной жидкости с конечной глубиной. Выберем следующие параметры: глубина $h = 6.0$; ускорение свободного падения $g = 1.0$; шаг по времени: $\tau = 0.001$. В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

$$y(0, u) = 0.01 \cos u, \quad \Psi(0, u) = 0.$$

Аппроксимируем ряды (1.6) конечными суммами с $N = 512$ слагаемыми и будем применять численные схемы, описанные выше. Будем рассматривать спектры решений в логарифмическом масштабе: по оси абсцисс будем откладывать номер гармоники k , а по оси ординат — $\lg |y_k|$ и $\lg |\Psi_k|$. Приведем результаты численного эксперимента, которому был присвоен номер **ZF-2-3** в системе учета вычислительных экспериментов www.calcs.ru. В этом эксперименте расчет проводился по схеме (3.15) — на рис. 3.1 показан спектр решения при $t = 20.0$. Гармоники с номерами от 0 до 25 характеризуют собственно решение, горизонтальная часть спектра с гармониками от 26 до 360 обусловлена конечностью машинной точности при вычислениях. Растущая часть спектра с гармониками от 360 до 511 — результат вычислительной неустойчивости схемы (3.15) в условиях машинной точности.

В численном эксперименте **ZF-2-4** применялась модифицированная схема метода прямых (3.16), с выбранным $q = 10^{-12}$, с теми же начальным

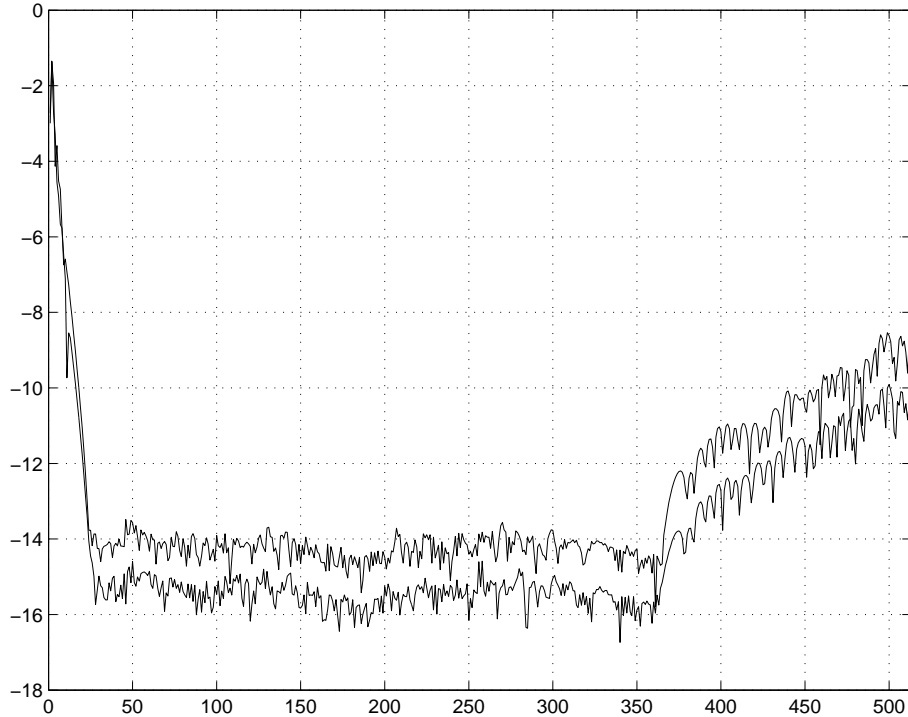


Рис. 3.1. Счет по схеме (3.15), $t = 20.0$

условиям. На рис. 3.2 показан спектр решения при $t = 100.0$. В отличие от случая на рис. 3.1 здесь мы не наблюдаем вычислительной неустойчивости.

Численный эксперимент 2. Для проведения численных расчетов будем использовать метод прямых, принимая $N = 512$. Выберем следующие параметры: ускорение свободного падения $g = -10.0$; шаг по времени: $\tau = 0.0001$. В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

$$R(0, w) = 1 + 0.01 \exp(-iw), \quad V(0, w) = 0.$$

Приведем результаты численного эксперимента **RT-3-5**, где расчет проводился по схеме (3.15). На рис. 3.3 показан спектр решения при $t = 0.3$. Первые гармоники от 0 до 10 характеризуют решение, а возрастающие по модулю гармоники (от 10) выражают факт неустойчивости. В данном примере мы сталкиваемся с неустойчивостью самих уравнений. Возникающие погрешности вычислений быстро разрушают численный счет.

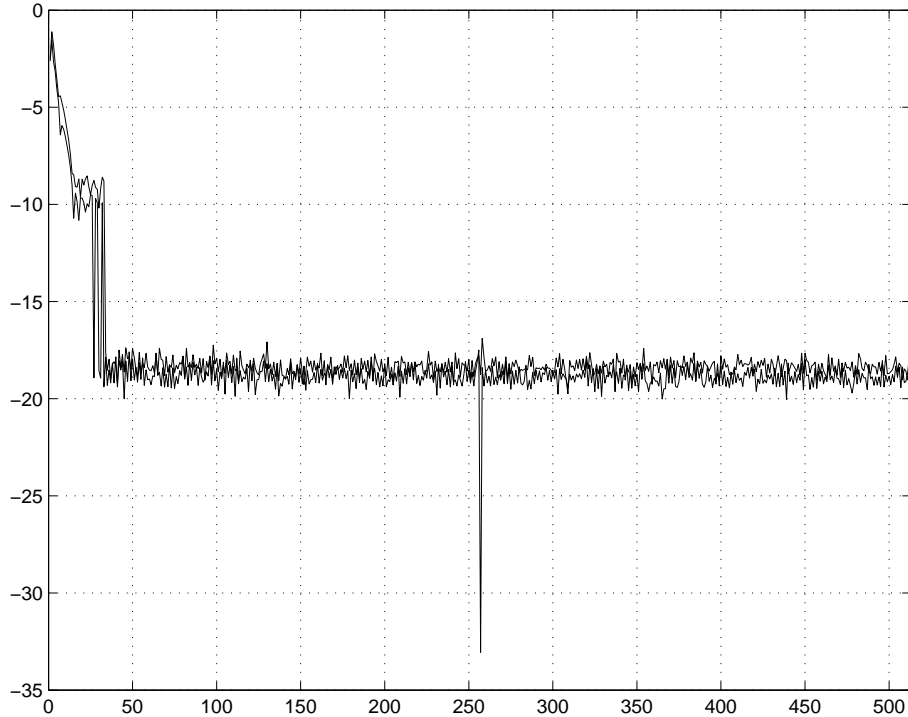


Рис. 3.2. Счет по схеме (3.16), $t = 100.0$

В численном эксперименте **RT-3-6** проверим нашу модифицированную схему (3.16) с этом случае с параметром $q = 10^{-12}$. На рис. 3.4 показан спектр решения при $t = 1.55$. Здесь мы не наблюдаем какой-либо вычислительной неустойчивости. Разумеется, дальнейший счет по схеме (3.16) требует увеличения размерности N , и приводит к разрушению гладкого решения, но это следствие неустойчивости течения Релея-Тейлора. На рис. 3.5 показан профиль свободной поверхности течения при $t = 1.55$.

3.4. Применение сплайн-аппроксимации

Для организации счета методом прямых, описанным в 2.4, основным моментом является способ дискретизации пространственных переменных. Выше подробно рассматривались методы дискретизации на основе рядов Фурье. К тому есть много оснований. Наши искомые решения (по про-

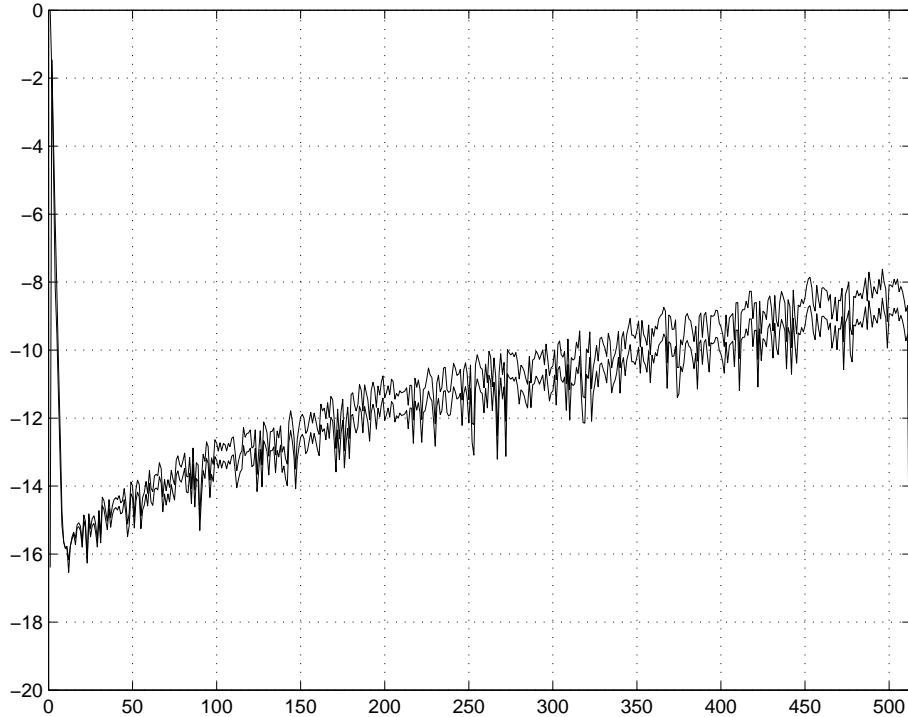


Рис. 3.3. Счет по схеме (3.15), $t = 0.3$

странственным переменным) являются периодическими аналитическими функциями. Хорошо известно, что для таких функций оптимальным способом табулирования является использование коэффициентов Фурье (см. [3]). Действительно, коэффициенты рядов Фурье для таких функций по модулю убывают по экспоненциальному закону, а это значит, что обрывая ряды, мы допускаем, вообще говоря, небольшую ошибку. Другим принципиальным моментом, диктующим применение рядов Фурье служит необходимость вычислять оператор Гильберта. Оператор Гильберта представляет собой сингулярный интегральный оператор, который выражается через интеграл в смысле главного значения. Вычисление этого интеграла от функции, заданной значениями на сетке, приводит к серьезным вычислительным проблемам. Вычисление оператора Гильберта от функции, заданной рядом Фурье, является очень простым. Вычисление производных также выгодно производить через ряды Фурье.

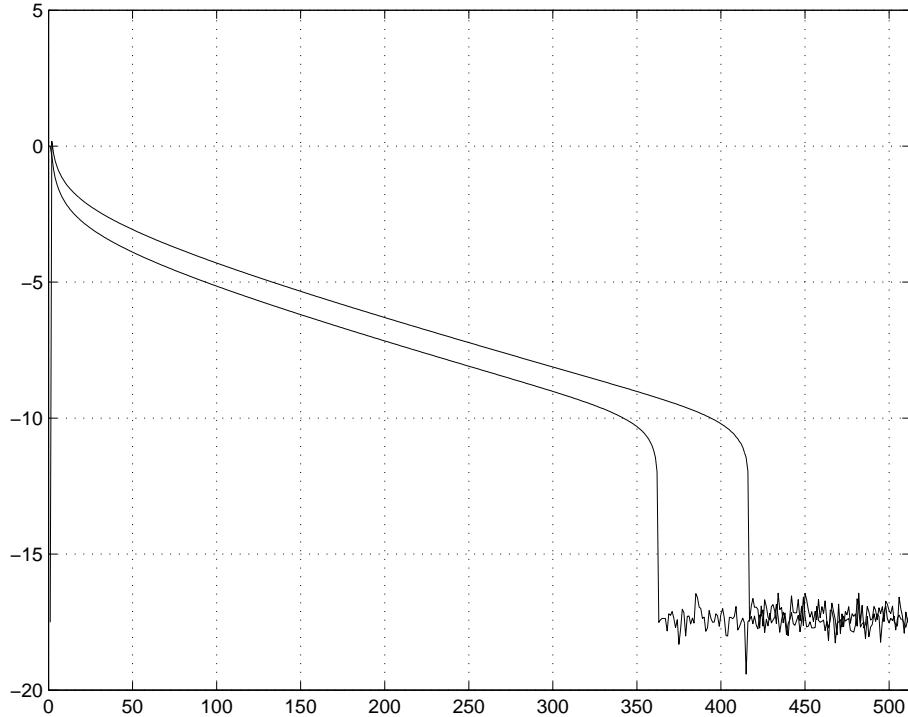


Рис. 3.4. Счет по схеме (3.16), $t = 1.55$

Несмотря на многие достоинства дискретизации с помощью рядов Фурье, у этого метода имеются и серьезные недостатки. Первый недостаток заключается в том, что, реализуя разложение в ряд Фурье через дискретное преобразование Фурье, мы вынуждены рассматривать функции, заданные на равномерной сетке. С другой стороны, достоинства рядов Фурье быстро таят в случае, когда гладкость функции начинает нарушаться. Если в ходе вычислений у решения возникнет особенность хотя бы в одной точке, то сходимость рядов Фурье резко изменится. При этом придется увеличивать равномерную сетку как вблизи сингулярной точки, так и на гладких участках решения. Очевидно, что для работы с решениями, имеющими точки нарушения гладкости, целесообразно использовать неравномерные сетки. Для этого потребуется использовать другие способы дискретизации решений.

В этом параграфе рассмотрим методы дискретизации на основе кубиче-

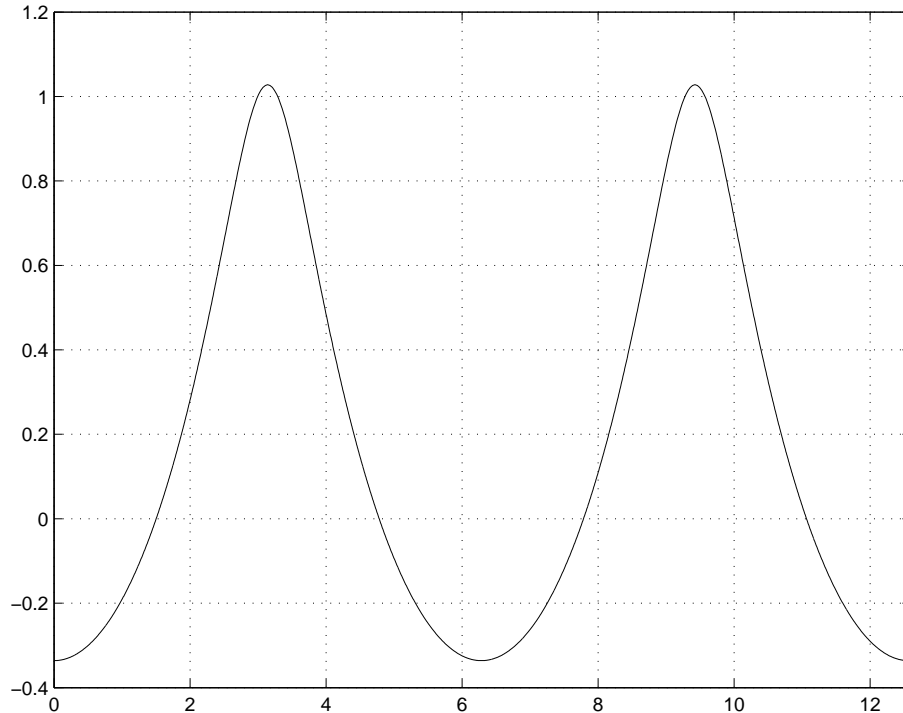


Рис. 3.5. Профиль свободной поверхности при $t = 1.55$

ских сплайнов с периодическими условиями. Такие сплайны мы уже рассматривали в предыдущем разделе с теоретической точки зрения, а сейчас рассмотрим дискретизацию на основе сплайнов наших задачах. Мы выбрали кубические сплайны по следующим причинам:

- эффективные и экономичные способы построения кубических сплайнов (метод прогонки);
- хорошие аппроксимативные свойства кубических сплайнов;
- численная устойчивость при вычислении параметров сплайнов;
- возможность корректно вычислять производные и оператор Гильберта.

Многие из этих (и других) приятных свойств кубических сплайнов хорошо известны и описаны в соответствующей литературе (см. [1], [6]). Однако

кубические сплайны с периодическими условиями можно использовать и для вычисления оператора Гильберта. Точнее, кубический сплайн (только для периодических условий!) допускает форму записи в виде ряда Фурье, где коэффициенты выражаются через параметры сплайна. Принципиальным моментом является то, что сплайн может быть задан на произвольной сетке, в том числе и неравномерной.

Рассмотрим лишь самые простые определения и факты из теории сплайнов. В частности, будем пользоваться известными теоремами о существовании и единственности кубических сплайнов с периодическими условиями. Будем рассматривать сетки без кратных узлов, поэтому сплайн однозначно задается своими значениями в узлах сетки. При этом можно вычислить любые коэффициенты кубического многочлена между узловыми точками.

Рассмотрим метод дискретизации с помощью сплайнов. Для любого $N > 0$ зафиксируем разбиение отрезка $[0, 2\pi]$

$$\Delta^N : \quad 0 = u_0^N < u_1^N < \dots < u_{N-1}^N < u_N^N = 2\pi.$$

Мы не требуем от сетки равномерности. При увеличении параметра дискретизации N также не требуем, чтобы разбиения Δ^N были вложенными. Через $|\Delta^N|$ обозначим диаметр разбиения, т.е. величину $\max\{u_k^N - u_{k-1}^N : k = 1, \dots, N\}$. Через S^N обозначим евклидово пространство векторов, состоящих из N комплексных чисел. Элементы $s \in S^N$ будем интерпретировать как кубические сплайны с периодическими условиями, заданные на сетке Δ^N и принимающие значения в узлах сетки:

$$s(u_k^N) = s_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

При этом без оговорок будем считать элементы S^N функциями, заданными на $[0, 2\pi]$, причем $S^N \subset C^2[0, 2\pi]$. Пусть задан произвольный непрерывный

оператор

$$\Gamma : C^2[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi],$$

тогда под записью $\Gamma s = \tilde{s}$, где $s \in S^N$ будем понимать числовой вектор $\tilde{s} \in S^N$, заданный значениями непрерывной функции (но уже не сплайна!) $f(u) = \Gamma s(u)$ на сетке Δ^N . Арифметические операции между сплайнами, а также прибавление константы определим очевидным образом, как покомпонентную операцию между значениями векторов из S^N .

Введем оператор проектирования функции из пространства $C[0, 2\pi]$ в пространство сплайнов S^N следующим образом:

$$P_S^N : f(u) = (f(u_1^N), f(u_2^N), \dots, f(u_N^N))^T.$$

Заметим, что, вообще говоря, мы не требуем от функции периодичности, поскольку сплайн (периодический) может быть построен по любому вектору из N чисел.

Система интегродифференциальных уравнений (1.24) может быть аппроксимирована следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} R_t^N &= i(U^N R_u^N - U_u^N R^N), \\ & t > 0 \\ V_t^N &= i(U^N V_u^N - B_u^N R^N) + g(R^N - 1), \\ U^N &= P(V^N \bar{R}^N + \bar{V}^N R^N), \\ B &= P(V^N \bar{V}^N). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Уравнения (3.18) необходимо дополнить начальными условиями:

$$R^N(0) = P_S^N R_0(u), \tag{3.19}$$

$$V^N(0) = P_S^N V_0(u).$$

При фиксированном t решения системы (3.18)–(3.19) интерпретируются как сплайны из пространства S^N .

Пусть на временном отрезке $[0, T]$ существует единственное решение системы (1.24), а разбиение таково, что $\lim_{N \rightarrow \infty} |\Delta^N| = 0$ при N стремящемся к бесконечности. Тогда приближенные решения задачи Коши (3.18)–(3.19) стремятся к решениям соответствующей системы (1.24). Это следует из свойств сходимости кубических сплайнов и результатов параграфа 3.2.

При численном решении задачи Коши (3.18)–(3.19) явными методами Рунге-Кутты нам понадобится вычислять правую часть уравнения (3.18). При этом вычислении мы встречаемся с арифметическими операциями, однократным дифференцированием, а также оператором Гильберта. Если с арифметическими операциями и дифференцированием с помощью сплайнов проблем не возникает, то алгоритм вычисления оператора Гильберта следует оговорить особо.

Мы легко умеем вычислять оператор Гильберта от функций, разложенных в ряды Фурье. Поэтому сначала покажем, как кубический сплайн с периодическими условиями может быть выражен через коэффициенты Фурье.

Введем периодическую на $[0, 2\pi]$ функцию $D(u)$ по формуле

$$D(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^4}.$$

Для произвольного сплайна $s \in S^N$ можно однозначно вычислить разрывы третьей производной в узлах сетки. Поскольку между узлами сетки сплайн

является многочленом третьей степени, то третья производная между узлами есть константа. Введем обозначения:

$$\beta_i = s'''(u_i^N + 0) - s'''(u_i^N - 0), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\beta_0 = \int_0^{2\pi} s(u) du.$$

Оказывается, разрывы третьей производной в узлах задают сплайн с точностью до интеграла по отрезку $[0, 2\pi]$. В силу следствия 1.1.6. из гл. 1 [15] кубический сплайн с периодическими условиями может быть представлен по формуле:

$$s(u) = \beta_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i D(u - u_i). \quad (3.20)$$

При этом

$$\sum_{i=1}^N \beta_i = 0.$$

Рассмотрим действие оператора Гильберта на сплайн, представленный формулой (3.20). В силу линейности имеем

$$\mathbb{H}[s](u) = \sum_{i=1}^N \beta_i \mathbb{H}[D](u - u_i).$$

Функция $\mathbb{H}[D]$ уже может быть легко вычислена, поскольку ядро D представлено рядом Фурье. Действительно,

$$\mathbb{H}[D] = - \sum_{k=1}^N \frac{\sin ku}{k^4}. \quad (3.21)$$

В реальных вычислениях, разумеется, ряд (3.21) должен быть заменен конечной суммой.

Заметим, что численное решение задачи (1.24) с помощью сплайнов требует значительно большего искусства от вычислителя, нежели с использованием рядов Фурье. Однако это может быть необходимым для вычисления режимов обрушения поверхностных волн и образования особенностей.

Упражнение 3.1. Реализовать на ЭВМ указанную процедуру для получения приближенных решений на нерегулярной сетке.

Глава 4

Конструктивная оценка времени существования аналитических решений

В главе 2 рассматривались теоремы, гарантирующие существование и единственность решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости. Однако в этих теоремах установлено существование решений лишь на достаточно малом временном интервале. Аналогичные результаты, полученные в других работах, посвященных существованию решений уравнений, описывающих течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, тоже гарантируют существование решений только на достаточно малом временном интервале (см., например, [19], [21], [46]).

В настоящей главе рассмотрим различные методы, позволяющие оценить время существования решений, описывающих поверхностные волны. Будем формулировать сначала результаты для абстрактных эволюционных уравнений, а потом покажем, как эти результаты применить к уравнениям гидродинамики со свободной поверхностью.

4.1. Оценка времени существования решений на компактных множествах

Введем величину

$$T_M^N = \sup\{T \geq 0 : \text{на } [0, T] \text{ существует решение задачи (2.15)–(2.16) в } M_{q, s_1}^N\}.$$

Рассмотрим верхний предел

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} T_M^N = T_M.$$

Теорема 4.1. *Предположим, что задача (2.13)–(2.14) не может иметь более одного s -решения. Пусть $T_M > 0$, $T' < T_M$, тогда существует такая подпоследовательность N_l , что $T_M^{N_l} > T'$ и для любого $s_2 > 0$, $s_2 < s_1$*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|u^{N_l} - u\|_{C([0, T']; H_{s_2})} = 0, \quad (4.1)$$

где u есть s_2 -решение задачи (2.13)–(2.14).

Доказательство. Для сокращения письма введем обозначения для пространств: $H = H_0$, $V = H_{s_2}$ и введем множество:

$$M = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k : |u_k| \leq q e^{-s_1 k} \right\}.$$

Легко видеть, что множество M компактно в V , а пространство V компактно вложено в H .

По определению верхнего предела существует такая подпоследовательность N_l , что $T_M^{N_l} > T'$.

Рассмотрим функционал невязки:

$$J(u) = \left\| u(t) - \varphi - \int_0^t Au(s) ds \right\|_{C([0, T'_k]; H)}$$

на пространстве $C([0, T']; V)$. Очевидно, что этот функционал непрерывный. Поскольку u^{N_i} являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, то $u^{N_i} \in C^1([0, T']; M)$. В силу обобщенной теоремы Арцела (теорема 7, гл. 2, [14]) последовательность $\{u^{N_i}\}$ предкомпактна в $C([0, T']; V)$. Следовательно, существует подпоследовательность u^{N_m} , сходящаяся в $C([0, T']; V)$ к u^* . В силу непрерывности функционала J имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} J(u^{N_m}) = J(u^*)$. Покажем, что $J(u^*) = 0$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} J(u^{N_m}) &= \max_{t \in [0, T']} \|u^{N_m}(t) - \varphi - \int_0^t Au^{N_m}(s)ds\|_H = \\ &= \|P_{N_m}\varphi - \varphi + \int_0^t P_{N_m}Au^{N_m}(s)ds - \int_0^t Au^{N_m}(s)ds\|_H \leq \\ &= \max_{t \in [0, T']} \|P_{N_m}\varphi - \varphi\|_H + \max_{t \in [0, T']} \left\| \int_0^t (P_{N_m}Au^{N_m}(s) - Au^{N_m}(s))ds \right\|_H. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое

$$\begin{aligned} &\max_{t \in [0, T']} \left\| \int_0^t (P_{N_m}Au^{N_m}(s) - Au^{N_m}(s))ds \right\|_H = \\ &= \max_{t \in [0, T']} \int_0^t \|(I - P_{N_m})Au^{N_m}(s)\|_H ds \leq \max_{t \in [0, T'_k]} \int_0^t \|(I - P_{N_m})Au^{N_m}(s)\|_H ds. \end{aligned}$$

Поскольку $Au^{N_m}(t)$ принадлежит ограниченному множеству в V , то равномерно по $t \in [0, T']$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(I - P_{N_m})Au^{N_m}(t)\|_H = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u^{N_m}) = 0.$$

При каждом $t \in [0, T']$ имеем $u^{N_m}(t) \in M$. Ввиду замкнутости M получаем, что $u^*(t) \in M$ при всех $t \in [0, T'_k]$. Таким образом, u^* является s_2 -решением задачи (2.13)–(2.14) на $[0, T']$.

Покажем теперь, что $\{u^{N_l}\}$ сходится к u^* . В самом деле, имеем

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0, T']; H)} \geq 0.$$

Пусть

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0, T']; H)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{N_p} - u^*\|_{C([0, T']; H)}.$$

В силу компактности вложения

$$C^1([0, T']; V) \subset C([0, T']; H)$$

можем считать, что u^{N_p} сходится к некоторой функции v^* . Рассуждениями, аналогичными выше, получаем, что v^* является s_2 -решением задачи (2.13)–(2.14). Однако согласно предположению задача (2.13)–(2.14) имеет единственное решение, следовательно, $v^* = u^*$. Поэтому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0, T']; H)} = 0.$$

□

4.2. Оценка времени существования решений

по невязке

Результаты предыдущего раздела можно существенно улучшить, если использовать методы оценки величины невязки. Будем рассматривать задачу (2.8). С этой задачей будем рассматривать функционал невязки на отрезке $[0, t]$, при $t \in [0, \mathbb{T}]$, где \mathbb{T} — фиксированное положительное число.

Введем следующую функцию:

$$J(t) = \inf_{u \in C([0,t];V)} \max_{t' \in [0,t]} \|u(t') - \varphi - \int_0^{t'} Au(s)ds\|_{C([0,t];H)},$$

где пространства H , V были определены в разделе 2.4.

Сделаем несколько замечаний относительно функции $J(t)$. Во-первых, считаем, что начальный элемент φ фиксирован во всех наших рассуждениях. Во-вторых, функция $J(t)$ определена для всех $t \geq 0$. В-третьих, в силу абсолютной непрерывности интеграла Бохнера функция J является непрерывной функцией. В-четвертых, легко видеть, что эта функция является монотонно (но не строго) возрастающей функцией. Наконец, если задача 2.8 имеет решение на отрезке $[0, T]$, то функция J равна нулю на этом отрезке. Верно и обратное, если функция J равна нулю на отрезке $[0, T]$, то задача 2.8 имеет решение (возможно, не единственное) на отрезке $[0, T]$.

Вместе с задачей (2.8) будем рассматривать и конечномерную задачу (2.10). Соответственно введем и функционал невязки $J^N(t)$:

$$J^N(t) = \inf_{u \in C([0,t];V)} \max_{t' \in [0,t]} \|u(t') - P_N\varphi - \int_0^{t'} P_N Au(s)ds\|_{C([0,t];H)}.$$

Лемма 4.1. *Для любых $\varphi \in H$ и $t \geq 0$ существует такая положительная сходящаяся к нулю последовательность $\alpha_N(t, \varphi) = \alpha_N(t)$, что*

$$|J(t) - J^N(t)| \leq \alpha_N(t). \quad (4.2)$$

Доказательство. Через $J(u, t)$ и $J_N(u, t)$ обозначим функционалы:

$$J(u, t) = \max_{t' \in [0,t]} \|u(t') - \varphi - \int_0^{t'} Au(s)ds\|_{C([0,t];H)},$$

$$J^N(u, t) = \max_{t' \in [0, t]} \|u(t') - P_N \varphi - \int_0^{t'} P_N A u(s) ds\|_{C([0, t]; H)}.$$

Для фиксированных N и $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} J(u, t) &= \max_{t' \in [0, t]} \|u(t') - \varphi - \int_0^{t'} A u(s) ds\|_{C([0, t]; H)} = \\ &= \max_{t' \in [0, t]} \|u(t') - P_N \varphi + (P_N - I)\varphi - \int_0^{t'} P_N A u(s) ds + \int_0^{t'} (P_N - I) A u(s) ds\|_{C([0, t]; H)} \leq \\ &= J^N(u, t) + \|(I - P_N)\varphi\|_{C([0, t]; H)} + \max_{t' \in [0, t]} \left\| \int_0^{t'} (I - P_N) A u(s) ds \right\|_{C([0, t]; H)} \end{aligned}$$

Второе слагаемое $\|(I - P_N)\varphi\|_{C([0, t]; H)}$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, а третье оценивается рассуждениями, аналогичными рассуждениям в доказательстве теоремы 4.1. Таким образом существует положительная сходящаяся к нулю при фиксированном t и $N \rightarrow \infty$ последовательность $\alpha_N^1(t)$ такая, что

$$J(u, t) - J^N(u, t) \leq \alpha_N^1(t). \quad (4.3)$$

Аналогично доказывается существование положительной сходящейся к нулю последовательности $\alpha_N^2(t)$ такой, что

$$J^N(u, t) - J(u, t) \leq \alpha_N^2(t). \quad (4.4)$$

Из неравенств (4.3), (4.4) следует, что существует такая последовательность $\beta_N(t)$, что

$$J(u, t) = J^N(u, t) + \beta_N(t),$$

причем $|\beta_N(t)| \leq \max\{\alpha_N^1(t), \alpha_N^2(t)\}$. Поскольку последовательность $\beta_N(t)$ не зависит от u , то

$$\left| \inf_{u \in C([0, t]; V)} J(u, t) - \inf_{u \in C([0, t]; V)} J^N(u, t) \right| \leq |\beta_N(t)|.$$

Остается только заметить, что

$$\inf_{u \in C([0,t];V)} J(u, t) = J(t),$$

и

$$\inf_{u \in C([0,t];V)} J^N(u, t) = J^N(t).$$

□

Пусть $a(t)$, $a_n(t)$ — непрерывные, неубывающие функции на $[0, \mathbb{T}]$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 4.1. Существует такое число $t^* \in (0, \mathbb{T}]$, что $a(t) = 0$ при $t \in [0, t^*]$ и $a(t) > 0$, при $t > t^*$, если $t^* \neq \mathbb{T}$.

Условие 4.2. Существует такая числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ и

$$|a(t) - a_n(t)| \leq \alpha_n, \quad t \in [0, \mathbb{T}], \quad n > 0. \quad (4.5)$$

Построим числовую последовательность t_n следующим образом:

$$t_n = \min\{\mathbb{T}, \max\{t : a_n(t) = \alpha_n\}\}.$$

Лемма 4.2. Пусть выполнены условия 4.1 и 4.2, тогда

$$t_n \geq t^*, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. В силу неравенства (4.5) имеем оценку

$$a_n(t) \leq \alpha_n, \quad t \in [0, t^*]. \quad (4.6)$$

Если $t_n = \mathbb{T}$, то утверждение леммы очевидно. Предположим, что существует такое $\tilde{t} \in (0, \mathbb{T})$, что $a_n(\tilde{t}) = \alpha_n$, тогда в силу оценки (4.6) и неубывания функции a_n имеем, что

$$a_n(t) = \alpha_n, \quad t \in [\tilde{t}, t^*].$$

отсюда следует, что $a_n(t^*) = \alpha_n$, т.е. $t_n \geq t^*$. □

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия 4.1, 4.2, тогда последовательность t_n сходится к t^* .

Доказательство. Поскольку $t^* \leq t_n \leq \mathbb{T}$, то существует подпоследовательность t_{n_m} такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_{n_m} = t'.$$

Видим, что $t' \geq t^* > 0$. Для любого ε такого, что $0 < \varepsilon < t'$, существует такое M , что при $m > M$ имеем

$$\max_{t \in [0, t' - \varepsilon]} |a(t) - a_{n_m}(t)| \leq \alpha_{n_m}$$

Поскольку $t_n \geq t^*$, то при $t \in [0, t' - \varepsilon]$ имеем

$$a_{n_m}(t) \leq \alpha_{n_m}.$$

Отсюда следует, что $a_{n_m} \rightrightarrows 0$ (сходится равномерно) при $t \in [0, t' - \varepsilon]$. В силу условия 4.1 из единственности равномерного предела получаем, что $a(t) = 0$ при $t \in [0, t' - \varepsilon]$. Следовательно, $t^* \geq t' - \varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $t^* \geq t'$. Из леммы 4.2 следует, что $t^* \leq t' \leq t^*$ или $t' = t^*$. Беря в качестве подпоследовательности t_{n_m} подпоследовательности, сходящиеся к верхнему и нижнему пределам, видим, что последовательность t_n сходится к t^* . □

Рассмотрим вопрос об оценке скорости сходимости последовательности t_n при $n \rightarrow \infty$.

Введем в рассмотрение множества $\{t : a(t) - \alpha_n = \alpha_n\}$, которые обозначим через I_n , $n \leq 1$. Введем числовую последовательность:

$$\beta_n = \begin{cases} \max I_n, & I_n \neq \emptyset; \\ \mathbb{T}, & I_n = \emptyset. \end{cases}$$

Лемма 4.3. Пусть выполнены условия 4.1, 4.2, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = t^*.$$

Доказательство. В случае, когда $t^* = \mathbb{T}$, последовательность β_n является стационарной: $\beta_n = \mathbb{T}$. Рассмотрим случай $t^* < \mathbb{T}$. Поскольку $a(\mathbb{T}) > 0$, то существует такой номер N , что при $n > N$ имеет место $a(\mathbb{T}) > 2\alpha_n$. Для таких номеров $I_n \neq \emptyset$, действительно, непрерывная функция $a(t)$, равная нулю при $t = 0$, достигает значения $2\alpha_n$ хотя бы в одной точке. Введем числовую функцию $\mathring{a}^{-1}(x) = \max\{t : a(t) = x\}$. Поскольку функция $a(t)$ непрерывна на $[0, \mathbb{T}]$, то функция $\mathring{a}^{-1}(x)$ непрерывна на $[0, a(\mathbb{T})]$. В рассматриваемом случае для достаточно больших n последовательность β_n может быть задана по формуле

$$\beta_n = \mathring{a}^{-1}(2\alpha_n).$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathring{a}^{-1}(x) = \mathring{a}^{-1}(0) = t^*.$$

□

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия 4.1, 4.2, тогда для последовательности t_n имеет место оценка

$$t^* \leq t_n \leq \beta_n. \quad (4.7)$$

Доказательство. Нижняя оценка в неравенстве 4.7 следует из леммы 4.2. Пусть $I_n \neq \emptyset$. Для произвольного $\tilde{t} > \beta_n$ в силу монотонности функции $a(t)$ имеем

$$a(\tilde{t}) - \alpha_n > \alpha_n.$$

Это означает, что $a_n(\tilde{t}) > \alpha_n$. Учитывая монотонность функции a_n , получаем, что $\tilde{t} > t_n$. В силу произвольности $\tilde{t} > \beta_n$, заключаем, что

$$t_n \leq \beta_n.$$

В случае, когда $I_n = \emptyset$, мы имеем очевидную оценку

$$t_n \leq \beta_n = \mathbb{T}.$$

□

Следствие 4.1. Пусть выполнены условия 4.1, 4.2 и пусть $t^* = \mathbb{T}$, тогда последовательность t_n является стационарной:

$$t_n = \mathbb{T}.$$

При исследовании времени существования решений уравнения (2.8) в качестве функции $a(t)$ возьмем функцию $J(t)$, а в качестве функций $a_n(t)$, возьмем функции $J^n(t)$. Предположим, что существует такое t_0 , что задача (2.8) имеет решение при $t \in [0, t_0]$. Тогда для выбранных функций $a(t)$, $a_n(t)$ условие 4.1 будет выполнено. Лемма 4.1 гарантирует выполнение условия 4.2. Таким образом к функционалам невязки можно применять теоремы 4.2, 4.3. В приложениях можно конструктивно наблюдать начальные элементы последовательности t_n , а теорема 4.2 гарантирует сходимость этой последовательности к числу t^* . Соответственно на отрезке $[0, t^*]$ будет существовать решение задачи 2.8 для рассматриваемого начального условия φ . Поскольку вся последовательность t_n нам обычно не известна, то для приложений необходима оценка скорости сходимости последовательности. Такую оценку нам может дать теорема 4.3. Конечно, для построения последовательности β_n необходимо знать свойства функции $a(t)$, которая часто является неизвестной, однако для построения β_n нет необходимости знать приближенные решения, а лишь априорную оценку невязки приближенных решений. В практике вычислительных экспериментов характерной является ситуация, когда выполнены условия следствия 4.1, и последовательность t_n является стационарной.

4.3. Оценочные функционалы

Введем числовую функцию на элементах пространства H_s следующим образом:

$$\nu(u) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_k|}{k},$$

допуская значения $\nu = -\infty$. В случае, когда существует такой номер K , что $u_k = 0$ при $k > K$, полагаем $\nu(u) = -\infty$.

Лемма 4.4. Пусть $u \in H_s$, тогда $\nu(u) \leq -s$.

Доказательство. Последовательность u_k можно представить в виде $u_k = \alpha_k e^{-sk}$, где последовательность $\{\alpha_k\} \in l_2$. Действительно,

$$\|\alpha_k\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 e^{2sk} = \|u\|_{H_s}^2.$$

Поскольку

$$\ln |u_k| = \ln |\alpha_k| - sk$$

и при достаточно больших k имеем $\ln |\alpha_k| < 0$, то

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_k|}{k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\alpha_k|}{k} - s \leq -s.$$

□

Введем еще функцию $\nu_k(u)$, заданную на элементах H_s , следующим образом:

$$\nu_k(u) = \begin{cases} \frac{\ln |u_k|}{k}, & u_k \neq 0 \\ -\infty, & u_k = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность $\{u^N\} \subset H_s$, где $u^N = \sum_{k=1}^N u_k^N e_k$.

Теорема 4.4. Пусть $\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u\|_{H_s} = 0$ для $u \in H_s$. Предположим, что

$$\nu(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_k|}{k} = -s \neq -\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_\varepsilon > 0$, независящая от N и k такая, что

$$|\nu_k(u^N) - \nu(u)| \leq C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon, \quad k \leq N,$$

исключая k, N для которых $u_k^N = 0$.

Доказательство. Поскольку $\nu(u) = -s$, то существует $C_0 > 0$ и такая числовая последовательность $\gamma_k > 0$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_k)^{-1} e^{ks} |u_k| = C_0.$$

Причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_{1\varepsilon}$ такая, что

$$\gamma_k \leq C_{1\varepsilon} e^{-\varepsilon k}. \quad (4.8)$$

Следовательно,

$$|u_k| = (C_0 + \delta_k) \gamma_k e^{-ks},$$

где $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу сходимости u^N к u в H_s следует, что $u_k^N \rightarrow u_k$, при $N \rightarrow \infty$. Поэтому для фиксированного k существует последовательность $\Delta_k^N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ такая, что

$$|u_k^N| = (C_0 + \delta_k + \Delta_k^N) \gamma_k e^{-sk}.$$

Пусть $N_0 > 0$ такая, что при $N > N_0, k > N_0$ имеем

$$|\delta_k + \Delta_k^N| < \frac{C_0}{2}.$$

Учитывая (4.8), имеем оценку:

$$\begin{aligned} |\nu_k(u^N) - \nu(u)| &= \left| \frac{\ln |C_0 + \delta_k + \Delta_k^N|}{k} + \frac{\ln \gamma_k}{k} - s + s \right| \leq \\ & \frac{|\ln(2C_0)|}{k} + \frac{|\ln C_{1\varepsilon}|}{k} + \varepsilon \leq C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

4.4. Оценка времени существования поверхностных волн идеальной жидкости

В настоящем разделе мы покажем, как методы предыдущих разделов могут быть применены к задаче (1.24).

Для построения конструктивной оценки времени существования бесконечномерной системы необходимо аппроксимировать эту систему конечномерной системой. Будем использовать аппроксимационную схему, описанную в разделе 2.6. Приведем еще раз эту численную схему применительно к задаче (1.24). Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N r_k(t) e^{-iku}, \quad V^N(u, t) = \sum_{k=1}^N v_k(t) e^{-iku}. \quad (4.9)$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье (4.9) имеет существенные преимущества. Действительно, пусть $f = \sum_{k=1}^N f_k e^{-iku}$, то-

гда $f_u = \sum_{k=1}^N (-ik) f_k e^{-iku}$. Еще более эффективно вычисляется оператор

P . Для $g = \sum_{k=-N}^N g_k e^{-iku}$ имеем $P[g] = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^N g_k e^{-iku}$. Введем бинарную

операцию «*», которая является замкнутой для множества функций вида (4.9). Пусть $A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku}$, $B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}$. Тогда для $C = AB$ име-

ем $C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$. Операцию «*» введем следующим образом: $A * B =$

$\sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku}$, где c_k — коэффициенты Фурье функции C .

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} R_t^N &= i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N &= i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $U^N = P(V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N)$, $B = P(V^N * \bar{V}^N)$.

Система (4.10) решается явным методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности по переменной t .

Будем предполагать, что начальные функции R_0 и V_0 принадлежат пространству $E_{s_1}^4$, $s_1 > 0$.

Наряду с вычислением функций R^N , V^N , будем еще вычислять числовую функцию $\nu_k^N(t)$, определенную следующим образом:

$$\nu_k^N(t) = \min \left\{ \frac{|\ln |R_k^N(t)||}{k}, \frac{|\ln |V_k^N(t)||}{k} \right\}, \quad k \leq N,$$

предполагая, без ограничения общности, $R_k^N(t) \neq 0$, $V_k^N(t) \neq 0$.

Функция ν_k^N аппроксимирует функцию $\nu(t)$, построенную по точным решениям системы (1.24) — функциям $R(t)$ и $V(t)$:

$$\nu(t) = \min \left\{ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\ln |R_k||}{k}, \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\ln |V_k||}{k} \right\}.$$

Функция ν имеет естественную интерпретацию. Функции R , V являются аналитическими в нижней комплексной полуплоскости и имеющими особенности в верхней полуплоскости. Значение функции ν определяет расстояние особенностей до вещественной оси. До тех пор пока $\nu > s_0$, $s_1 > s_0 > 0$, система (1.24) имеет s_0 -решение. Функция ν оценивается через функцию ν_k^N с помощью теоремы 4.4. Функцию $\nu_k^N(t)$ будем называть оценочной функцией.

Глава 5

Применение методов статистики в численных экспериментах

Как уже отмечалось, вопрос о существовании решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, является достаточно сложным. В главе 4 мы рассматривали методы, позволяющие делать достоверные выводы о существовании решений на заданном временном интервале. Эти выводы следовали из результатов численного моделирования наших уравнений. Однако найти класс начальных данных, для которых решения существовали бы на заданном интервале, пока не удастся. В настоящей главе рассмотрим некоторые статистические методы анализа вычислительных экспериментов.

5.1. Статистическое исследование времени существования решений со случайными начальными данными

Начнем с вопроса о существовании достаточно малого шара (в разумной метрике) в пространстве начальных данных такого, что для всех на-

чальных данных из этого шара соответствующие решения являются глобальными решениями, т.е. существуют при всех $t > 0$. Этот вопрос, как один из основных нерешенных проблем теории поверхностных волн, был поставлен В.Крэйгом на Международной конференции «Математическая гидродинамика», Москва-2006. В нашей работе дадим некоторое подтверждение гипотезы о существовании малого шара в пространстве решений, для начальных данных из которого существуют глобальные решения.

Опишем схему нашего вычислительного эксперимента.

1. Выбираем временной интервал, на котором будем исследовать наши решения — фиксируем положительное число T .
2. Выбираем параметр дискретизации — фиксируем число $N > 1$.
3. Фиксируем положительное число β .
4. Выбираем число α такое, что $0 < \alpha < \beta$.
5. Строим случайные начальные данные следующим образом:

$$R_0(u) = 1 + \sum_{k=1}^N (\xi_k^r e^{-\alpha k}) e^{-iuk}, \tag{5.1}$$

$$V_0(u) = \sum_{k=1}^N (\xi_k^v e^{-\alpha k i}) e^{-iuk},$$

где $\xi_k^r, \xi_k^v, k = 1, 2, \dots, N$ суть независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[-1, 1]$.

6. Находим численные решения задачи (1.24) с начальными условиями, выбранными на предыдущем шаге.
7. Нахождение численного решения прекращаем при выполнении одного из двух условий: 1) $t = T$, 2) на текущем шаге по времени нарушено

одно из условий:

$$|r_k^N(t)| \leq e^{-\beta k},$$
(5.2)

$$|v_k^N(t)| \leq e^{-\beta k},$$

для всех $k = 1, \dots, N$ и $t < T$.

8. В первом случае считаем, что эксперимент закончился «неудачей», а во втором случае будем считать, что эксперимент закончился «успешно».

Считая параметры T , N , β фиксированными, имеем случайное событие $\kappa(\alpha)$, зависящее от параметра α . Это случайное событие может принимать два взаимно исключающих значения: «успех» и «неудача». Припишем значению «успех» числовое значение 1, а значению «неудача» — числовое значение 0. Таким образом, будем рассматривать случайную величину $\kappa(\alpha)$. Эта случайная величина имеет биномиальное распределение. С вероятностью p_α принимает значение 1 и с вероятностью $q_\alpha = 1 - p_\alpha$ принимает значение 0. Поскольку наша случайная величина зависит от параметра, то можно говорить о случайной функции, заданной на множестве $\Omega \subset (0, \beta)$.

Разумеется, мы не знаем истинного распределения вероятностей случайной величины $\kappa(\alpha)$, поэтому будем получать статистические оценки для вероятностей p_α и q_α , проводя серии вычислительных экспериментов. Как известно (см. [16], [25]), наиболее употребительной оценкой вероятности события является его частота появления. Эта оценка является состоятельной несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. В дополнение к полученной оценке вероятности «успеха» — (выхода численного решения из исследуемой области, т.е. нарушения неравенств (5.2)), будем вычислять доверительный интервал для нашей оценки.

Опишем параметры наших вычислительных экспериментов.

| | |
|--------------------------------|----------|
| Исследуемый временной интервал | [0, 10] |
| Параметр дискретизации | 1024 |
| Шаг по времени | 0.001 |
| Параметр β | 0.040475 |
| Количество серий вычислений | 1000 |

Параметр β выбран из условия:

$$\beta = -\frac{\ln 10^{-9}}{(N/2)}.$$

Переменный параметр α мы будем выбирать из множества $\Omega = \{0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1.0; 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5\}$. Для каждого значения параметра α проведем серию из 1000 испытаний. На основе этой выборке оценим вероятность того, что на отрезке $[0, 10]$ решение из класса (5.1) нарушит условие (5.2).

На рис. 5.1 приведена зависимость вероятности p_α от значения параметра α . Как и следовало ожидать, с увеличением параметра α вероятность «успехов», т.е. нарушения условий (5.2), уменьшается. При проведении опытов при значениях $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.6$ из серии 1000 испытаний нами было зарегистрировано 1000 «успехов», т.е. во всех случаях было нарушено условие 5.2. С другой стороны, при $\alpha = 1.5$ из 1000 испытаний нами не было зарегистрировано ни одного случая «успеха». На рис. 5.2 приведен доверительный интервал для оценки вероятности. Уровень значимости был выбран 95%.

С увеличением параметра α не только уменьшается вероятность «успеха», но и возрастает среднее время, при котором нарушается условие (5.2). График этой зависимости приведен на рис. 5.3.

Рассмотрим еще зависимость средней энергии волн, решения которых нарушали условие (5.2), от значения параметра α . Как и следовало ожи-

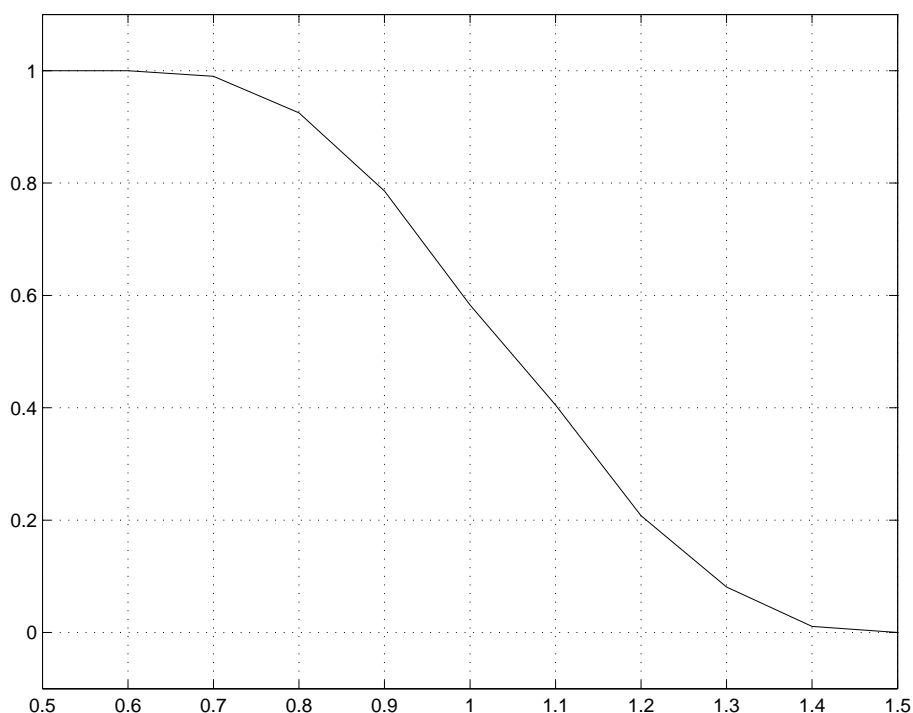


Рис. 5.1. Оценка вероятности

дать, с увеличением параметра α средняя энергия убывает. Интересно посмотреть зависимость вероятности «успехов» от энергии волн. Эта зависимость приведена на рис. (5.5). Рассмотрим еще зависимость среднего времени решений, которые нарушали условие (5.2), от энергии волн. Эта зависимость приведена на рис. 5.6. Для краткости будем говорить о времени разрушения волн.

В следующем разделе используем результаты наших экспериментов для нового метода исследования существования решений задачи (1.24).

5.2. Статистическая проверка гипотез о существовании решений

В настоящем разделе рассмотрим методы, позволяющие проверять гипотезы о существовании решений нелинейных уравнений, с использованием

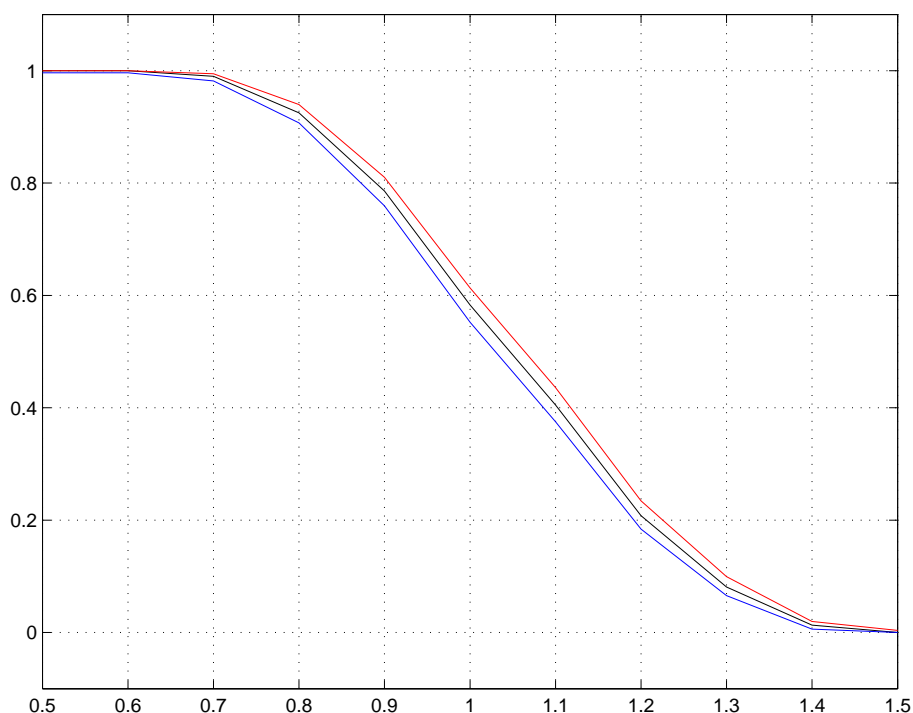


Рис. 5.2. Доверительный интервал (95%)

идей статистической проверки гипотез.

При исследовании нелинейных уравнений мы часто оказываемся в ситуации, когда теоремы о существовании решений не могут быть применены к конкретным ситуациям, возникающим в приложениях. При этом единственным способом исследования этих уравнений является численное моделирование. После проведения вычислительных экспериментов полученные результаты подвергаются экспертизе на соответствие экспериментальным данным или различным физическим представлениям. В случае, если результаты вычислительных экспериментов признаются адекватными, то делается вывод о достоверности проведенных численных экспериментов. Видно, что в описанной схеме роль математики состоит лишь в том, чтобы обосновать сходимость применяемых численных схем. Однако основной вопрос, существует ли решение, которое мы моделируем, часто остается нерешенным. Другим принципиальным моментом является то обстоятель-

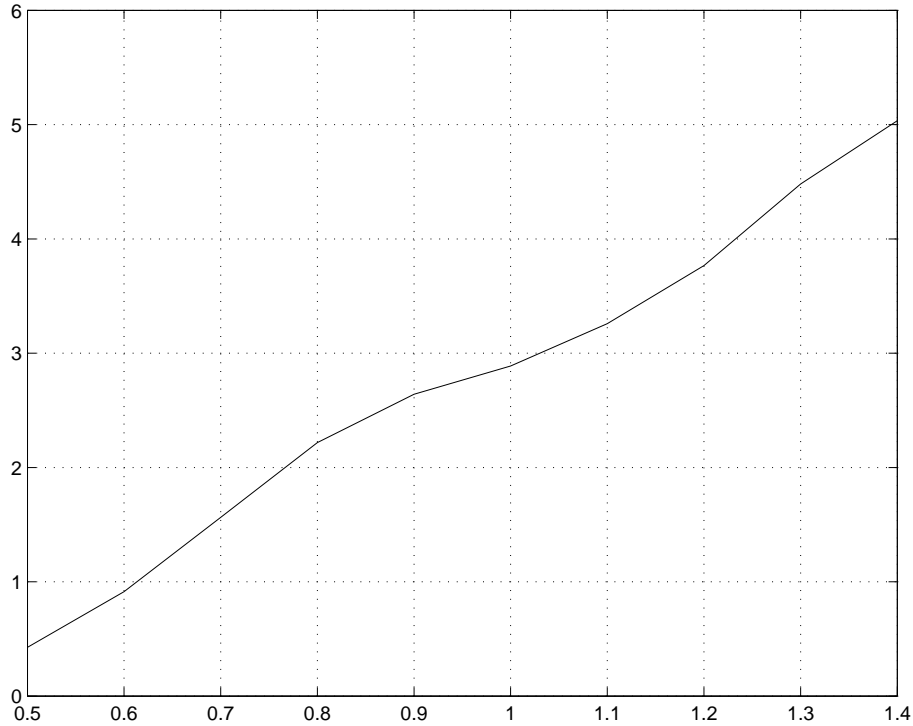


Рис. 5.3. Среднее время разрушения решений

ство, что, пытаясь делать выводы о существовании решений уравнений (часто в бесконечномерных пространствах), мы имеем в качестве результатов численных экспериментов лишь решения, принадлежащие конечномерным пространствам. Точнее, конечным и дискретным множествам конечномерных пространств. В настоящем разделе рассмотрим метод, позволяющий делать доказательные выводы о существовании решений. В качестве «платы» за попытку исследовать поведение бесконечномерных систем с помощью дискретных решений будем получать наши выводы с заранее определенной вероятностью. Заметим, что для прикладных расчетов, когда исходные данные заданы с погрешностью, а сами модели являются часто приближенными, получение вывода о существовании решения с большой долей вероятности является вполне достаточным.

Начнем наше рассмотрение с абстрактного случая, а потом рассмотрим его применение для задачи оценки времени существования решений урав-

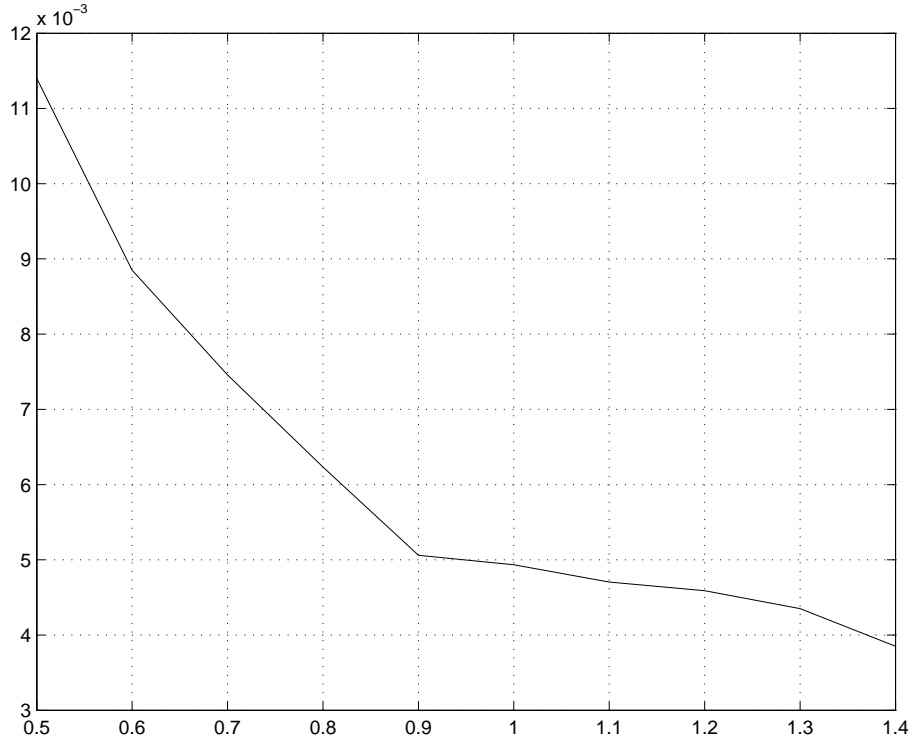


Рис. 5.4. Распределение энергии волн

нений (1.24).

Пусть X, Y — банаховы пространства. Будем рассматривать непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор

$$A : X \rightarrow Y.$$

Для заданного элемента $y \in Y$ рассмотрим уравнение

$$Ax = y. \tag{5.3}$$

Будем искать решение не во всем пространстве X , а лишь на заданном подмножестве $M \subset X$. Таким образом, под решением задачи (5.3) будем понимать элемент $x \in M$, на котором выполняется равенство (5.3). Правую часть (элемент y) также будем считать принадлежащей не всему пространству Y , множеству $Q \subset Y$.

Предположим, что имеем определенный алгоритм, позволяющий находить последовательность x_n для любого конечного $n = 1, 2, \dots$. При этом

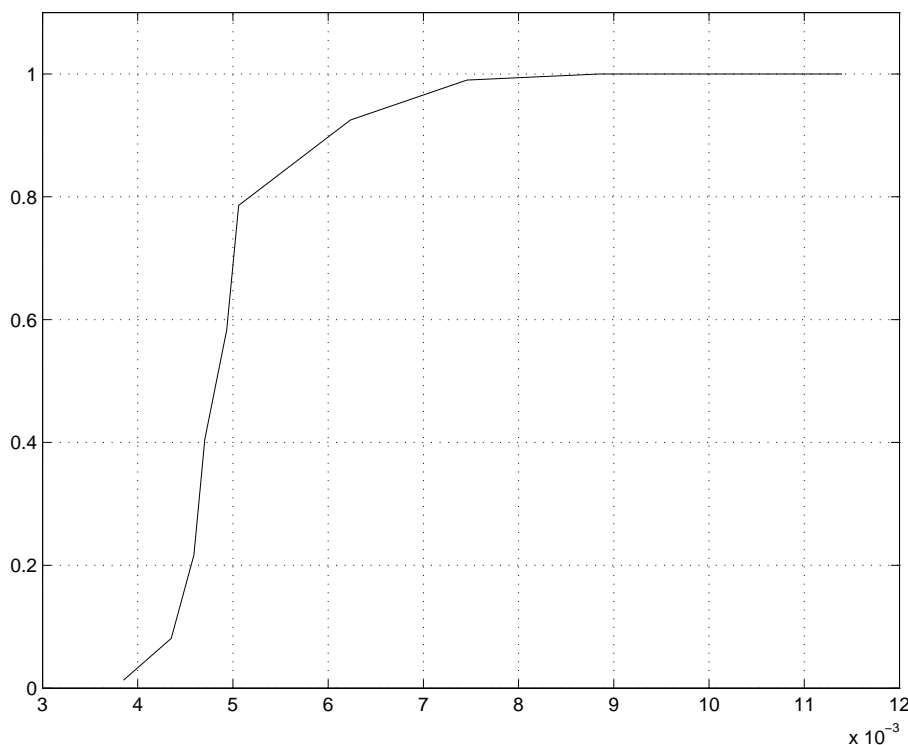


Рис. 5.5. Зависимость среднего времени разрушения волн от энергии последовательности x_n принадлежит пространству X , т.е. $\{x_n\} \subset X$.

Относительно последовательности x_n будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 5.1. Если имеет место вложение

$$\{x_n\} \subset M,$$

то при заданном элементе $y \in Q$ решение задачи (5.3) существует, это решение x принадлежит множеству M , и имеет место

$$\|x_n - x\|_X \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Условие 5.1 означает, что наш алгоритм дает приближенные решения уравнения (5.3) в случае, когда решение нашей задачи существует при заданной правой части $y \in Q$. Заметим также, что можно требовать принадлежности $x_n \in M$, начиная с достаточно большого значения n .

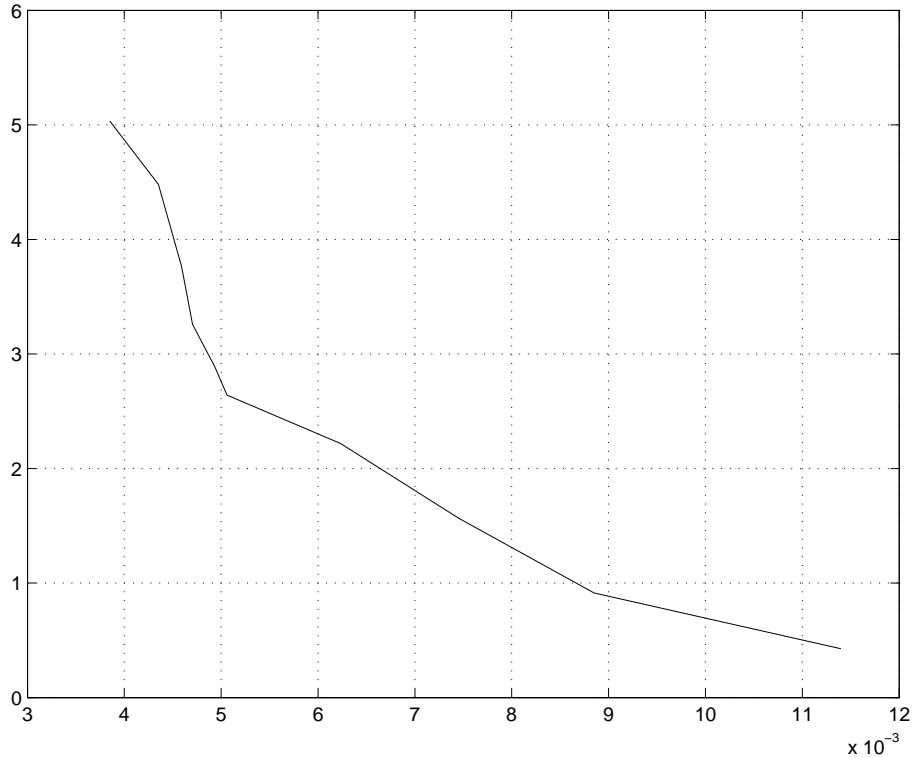


Рис. 5.6. Зависимость среднего времени разрушения волн от энергии

В реальности мы обычно не можем знать всю последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$. Как правило, имеем лишь конечное множество $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Задача состоит в том, чтобы по конечным *наблюдениям* $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$ сделать статистический вывод о принадлежности множеству M всей последовательности $\{x_n\}$, и соответственно сделать вывод о существовании решения задачи (5.3) для заданной правой части $y \in Q$.

Предположим, что мы нашли первые N членов последовательности x_n , и видим, что $x_n \in M$ при $n = 1, 2, \dots, N$. С какой вероятностью вся последовательность x_n принадлежит множеству M ? Прежде чем искать ответ на это вопрос, мы должны определить вероятностное пространство, относительно которого будем вычислять вероятность.

Предположим, что элемент y такой, что задача (5.3) не имеет решения. Тогда согласно условию 5.1 существует такой номер $N_1 \geq 1$, что $x_{N_1} \notin M$.

Введем величину $\nu(y)$, принимающую целые значения \mathbb{N} . Значение $\nu(y)$ определяется по формуле

$$\nu(y) = \min\{n : x_n \notin M\}.$$

Будем рассматривать ν в качестве случайной величины. Для этого необходимо задать функцию распределения $F(n)$. Конечно, мы не можем знать точную функцию распределения, поэтому для построения этой функции будем использовать статистические методы.

Опишем схему построения функции распределения.

1. Фиксируем множества M и Q .
2. Фиксируем достаточно большое целое число N .
3. Фиксируем целое число $T > 0$.
4. Выбираем произвольный элемент $y \in Q$.
5. Если $x_n \in M$, $n = 1, 2, \dots, N$, то переходим к шагу 3.
6. Находим $\nu(y)$.
7. Если найдено $\nu(y)$ меньше чем T , переходим к шагу 3.

В итоге имеем выборку S значений ν . Объем этой выборки равен T .

Замечание 5.1. При описанной выше схеме предполагается, что за конечное число шагов возможно набрать выборку нужного объема (см. раздел 5.1).

Функцию распределения зададим следующим образом:

$$F(n) = \frac{\#\{\nu \in S : \nu \leq n\}}{T},$$

где $\#$ означает мощность множества. Таким образом, вероятность распределения случайной величины ν задаем с помощью частоты.

Определение 5.1. Будем говорить, что задача (5.3) имеет решение (для фиксированного y) с ν -вероятностью α , если

$$\alpha = 1 - F(N'),$$

где F есть функция распределения вероятностей, и для всех $n = 1, 2, \dots, N'$ имеет место

$$x_n \in M.$$

Определение 5.2. Решение, существующее с ν -вероятностью единица, будем называть существующим ν почти наверное.

Заметим, что в этом определении число N' может быть как меньше N , так и больше. Очевидно, что если $N' \geq N$, то ν -вероятность всегда будет равна единицы.

Замечание 5.2. Разумеется, если мы получили, что решение существует ν почти наверное, это еще не значит, что решение задачи (5.3) существует на самом деле.

На адекватности наших статистических выводов сказываются объем выборки T при построении функции распределения и число N . Чем больше объем выборки T и число N , тем более адекватными будут наши выводы.

Проиллюстрируем наши идеи на примере задачи (1.24). Систему уравнений (1.24) можно записать в форме (5.3). Однако идеи, изложенные выше, не зависят от конкретной формы записи уравнения. Вместо рассмотрения правых частей уравнения (5.3) элемента y будем рассматривать начальные функции R_0, V_0 .

Для построения функции распределения используем результаты вычислительных экспериментов из раздела 5.1.

Множество Q определим следующим образом:

$$|r_k^N(t)| \leq e^{-\beta k},$$

$$|v_k^N(t)| \leq e^{-\beta k},$$

для всех $k = 1, \dots, 1024$ и $t < 10.0$, где

$$\beta = -\frac{\ln 10^{-9}}{(1024/2)} \approx 0.040475.$$

Соответственно множества M будем определять через числовой параметр $\alpha > 0$ следующим образом:

$$|r_k^N(t)| \leq e^{-\alpha k},$$

$$|v_k^N(t)| \leq e^{-\alpha k},$$

для всех $k = 1, \dots, 1024$ и $t < 10.0$.

В нашем эксперименте число T будет выбрано в зависимости от различных экспериментов при разных α . Приближения x_n будем выбирать из условия:

$$N = 64 \cdot 2^n, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Опишем параметры наших новых вычислительных экспериментов, основанных на предыдущих результатах.

| Номер эксперимента | Параметр α | число T |
|--------------------|-------------------|-----------|
| 1 | 0.7 | 990 |
| 2 | 0.8 | 925 |
| 3 | 0.9 | 583 |
| 4 | 1.0 | 583 |
| 5 | 1.1 | 405 |
| 6 | 1.2 | 208 |
| 7 | 1.3 | 81 |

Приведем плотности и функции распределения F для исследованных случаев.

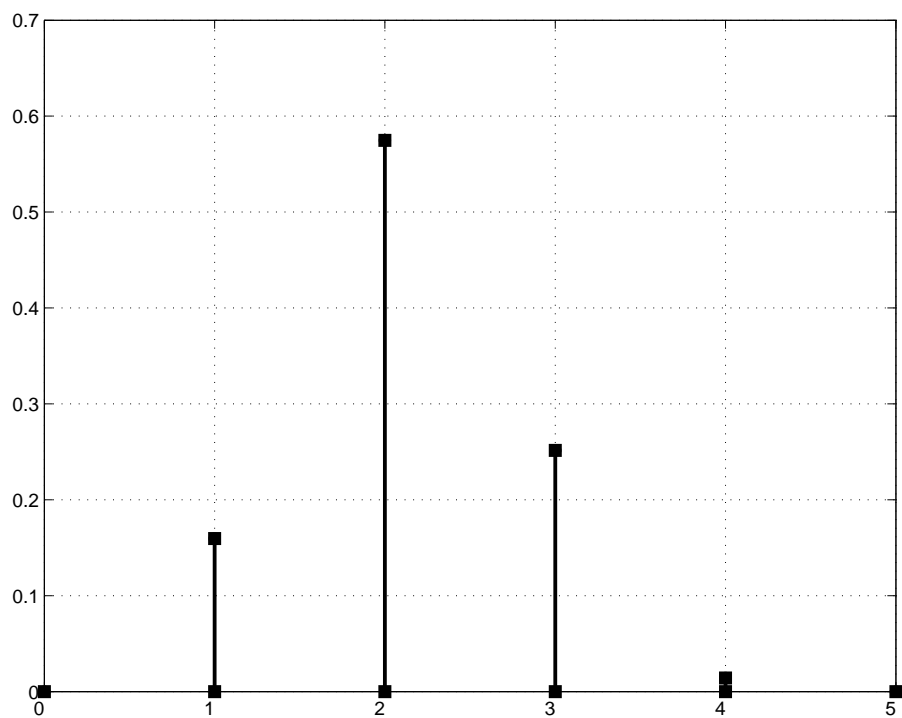


Рис. 5.7. Эксперимент №1, плотность распределения

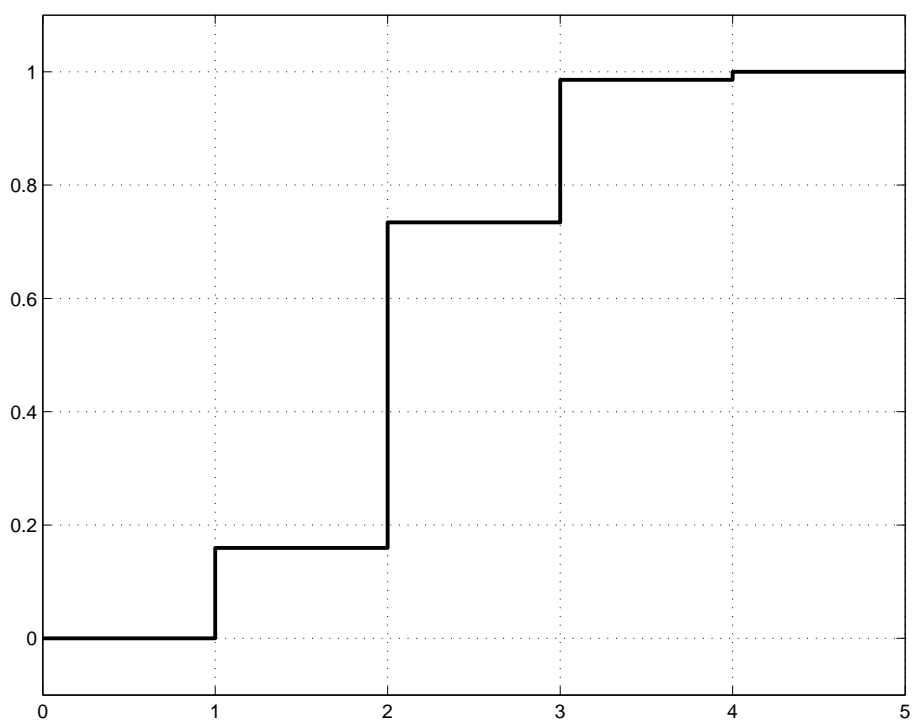


Рис. 5.8. Эксперимент №1, функция распределения

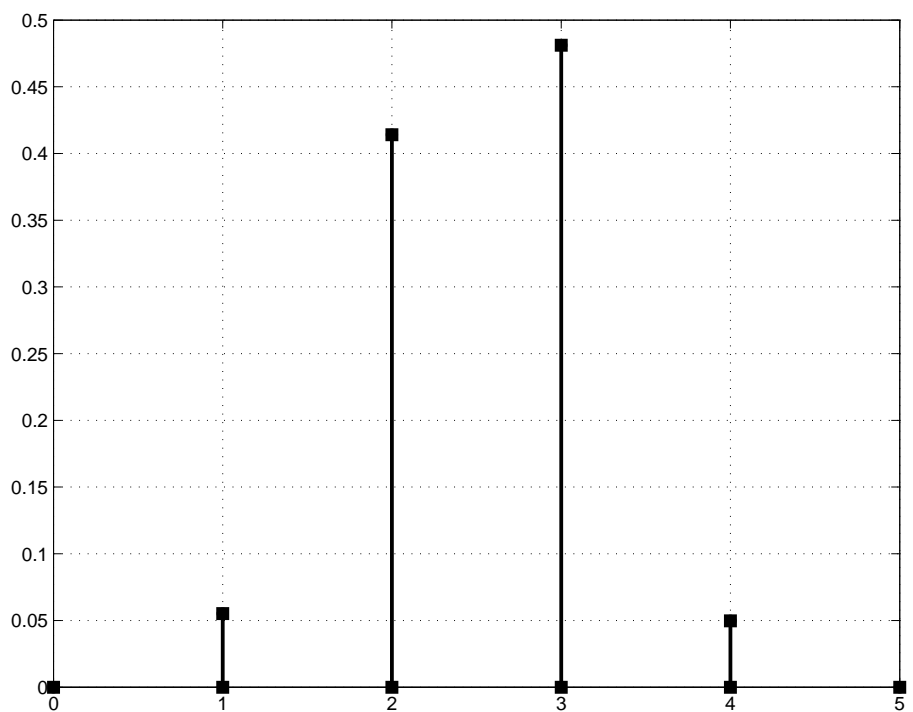


Рис. 5.9. Эксперимент №2, плотность распределения

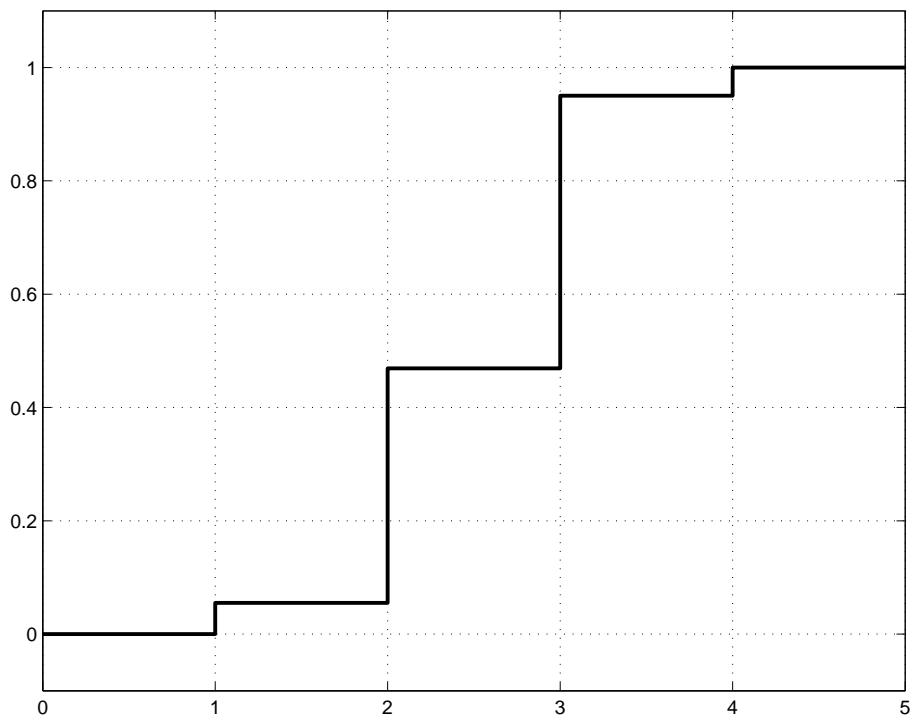


Рис. 5.10. Эксперимент №2, функция распределения

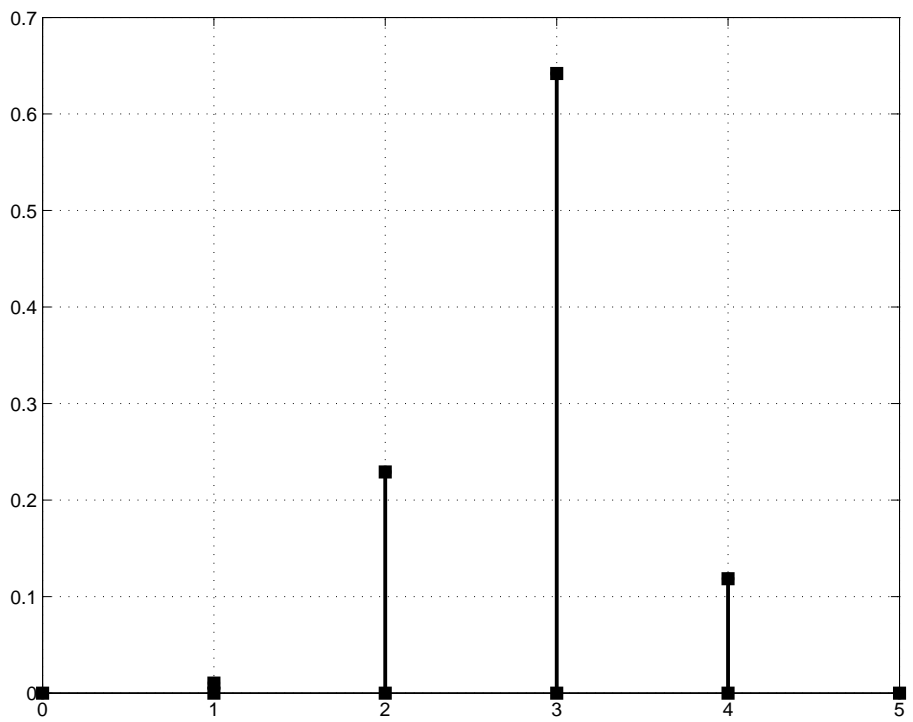


Рис. 5.11. Эксперимент №3, плотность распределения

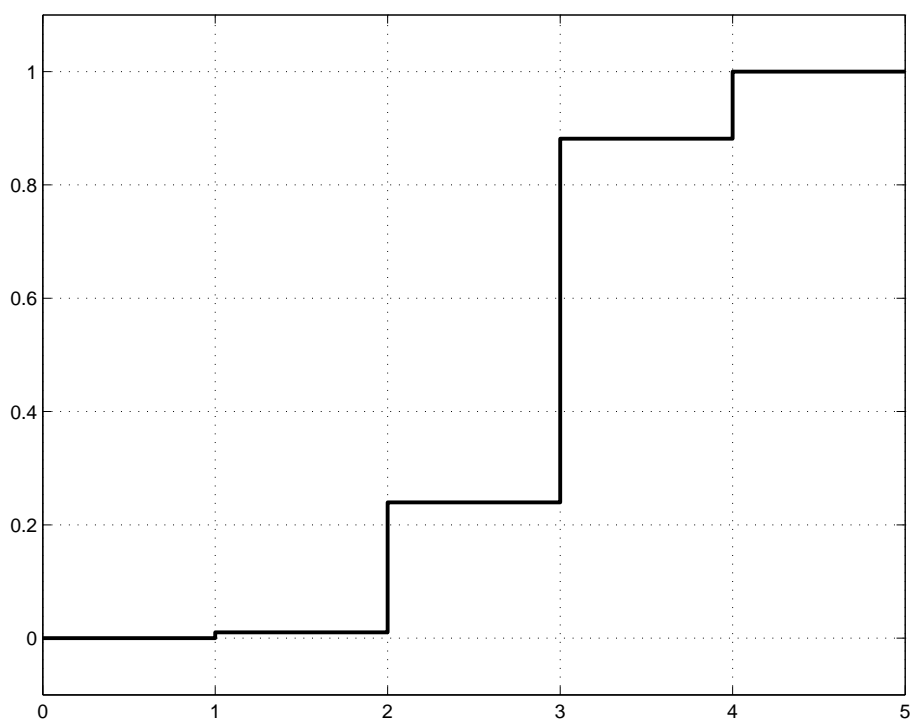


Рис. 5.12. Эксперимент №3, функция распределения

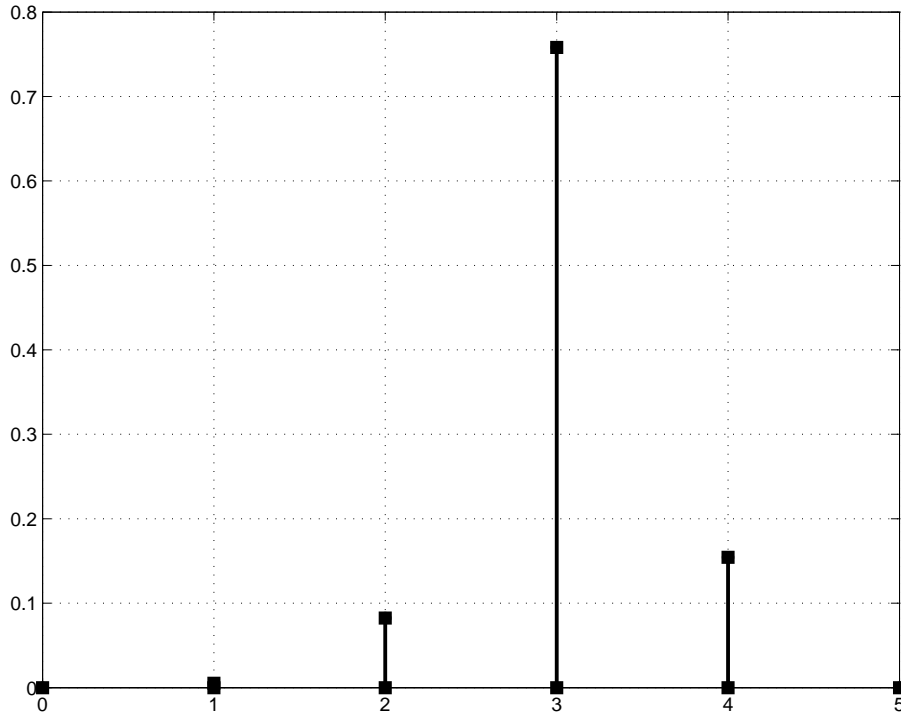


Рис. 5.13. Эксперимент №4, плотность распределения

Построенные нами функции распределения позволяют вычислять ν -вероятность существования решений задачи (1.24) по результатам численного моделирования.

Однако в случае, если максимальный номер приближения x_{n_1} совпадает с числом N , мы всегда будем получать результат, что решение существует ν почти наверное. В этом случае можно оценить вероятность существования решения с использованием статистических критериев проверки гипотез. Приведем таблицу, в которой даны вероятности существования решений с уровнем значимости 0.95% таких, что

$$x_n \in M, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

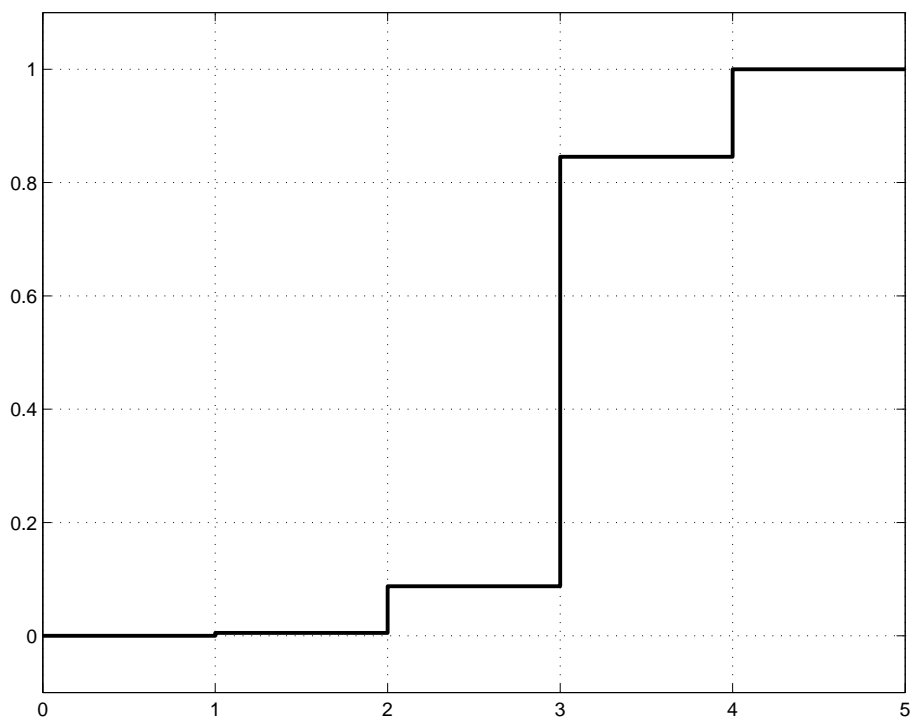


Рис. 5.14. Эксперимент №4, функция распределения

| Номер эксперимента | Вероятность существования решения |
|--------------------|-----------------------------------|
| 1 | 0.9961 |
| 2 | 0.9959 |
| 3 | 0.9951 |
| 4 | 0.9935 |
| 5 | 0.9906 |
| 6 | 0.9819 |
| 7 | 0.9547 |

Из этой таблицы видно, что если наше *численное решение* удовлетворяет условиям:

$$x_n \in M, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

то с достаточно большой вероятностью можно утверждать, что *истинное решение* существует для выбранных начальных данных.

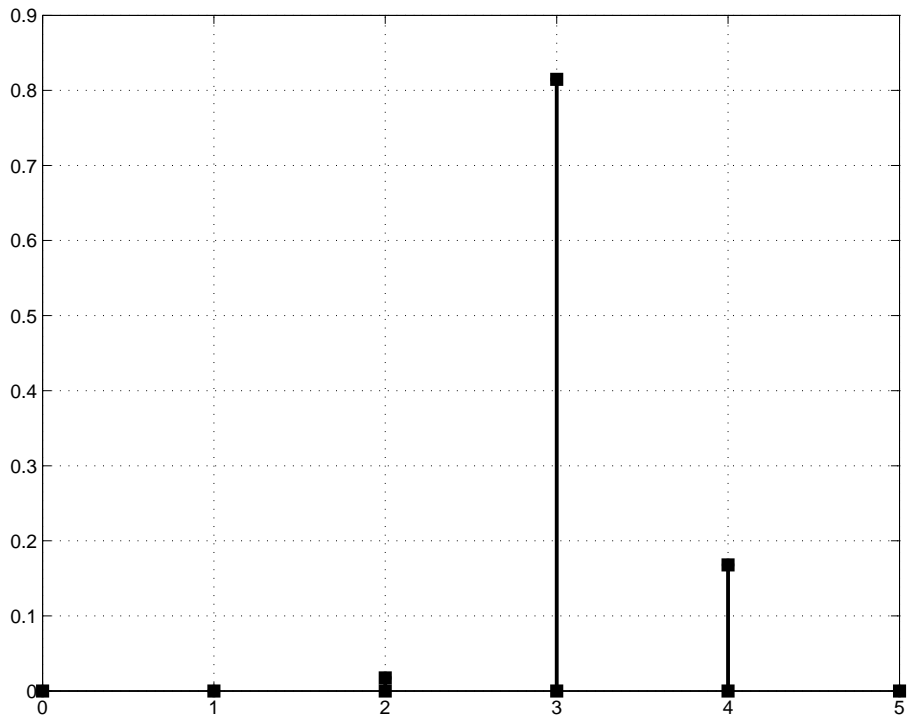


Рис. 5.15. Эксперимент №5, плотность распределения

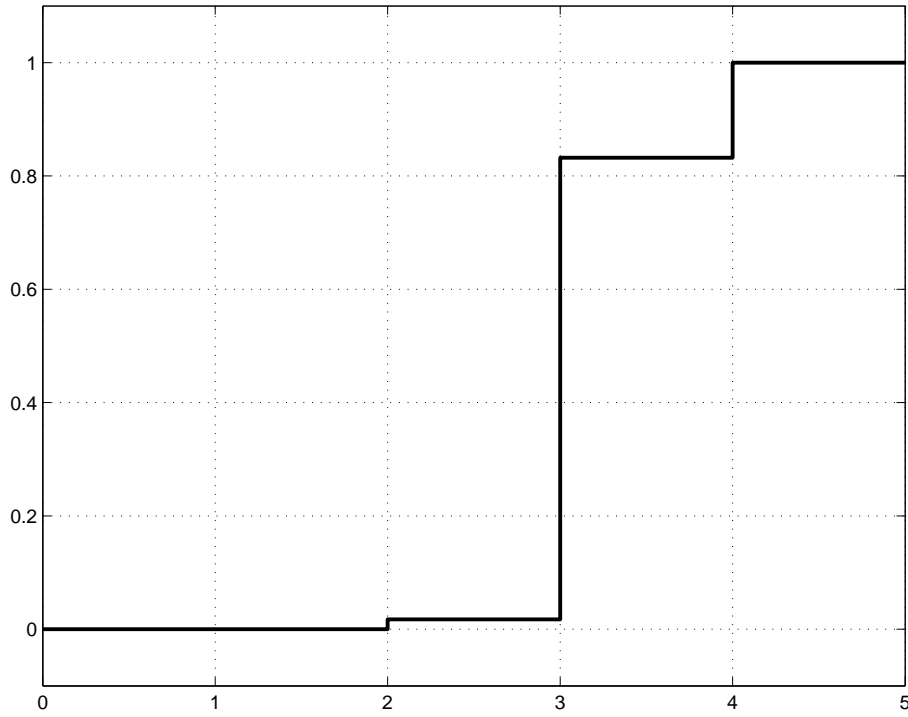


Рис. 5.16. Эксперимент №5, функция распределения

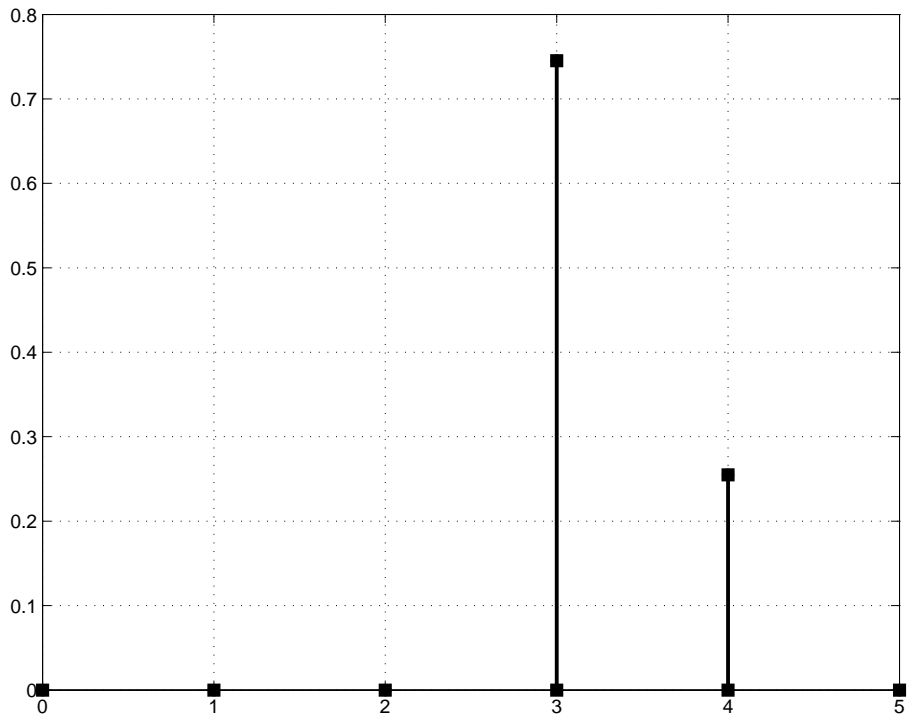


Рис. 5.17. Эксперимент №6, плотность распределения

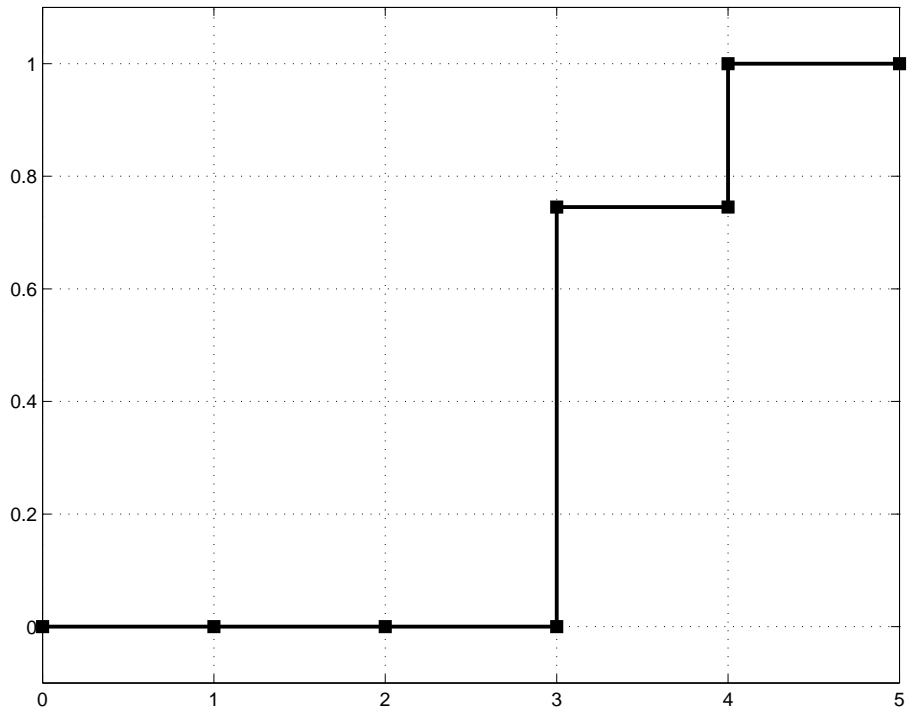


Рис. 5.18. Эксперимент №6, функция распределения

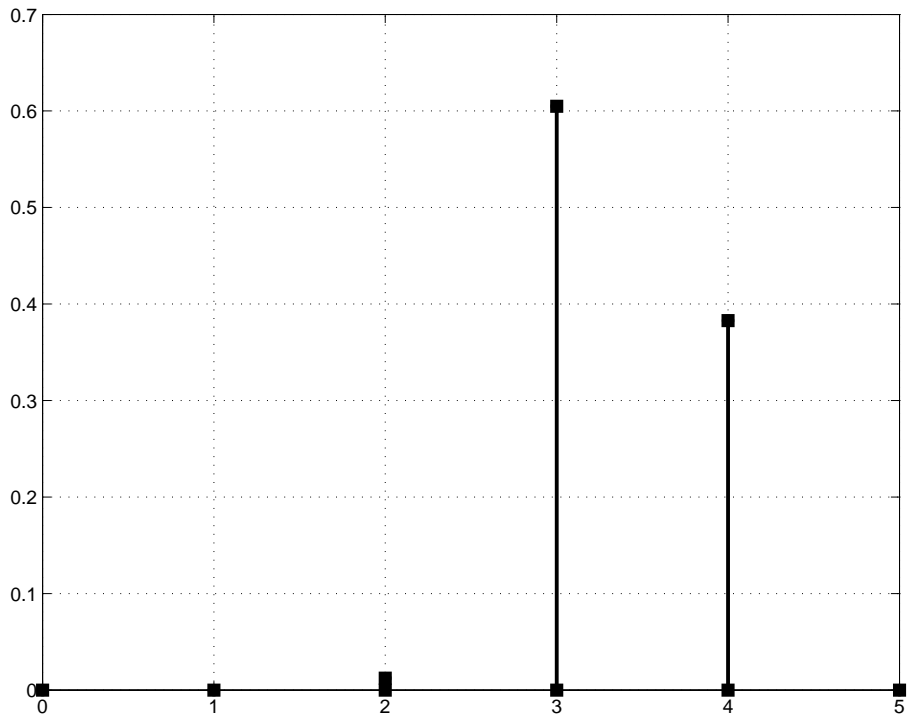


Рис. 5.19. Эксперимент №7, плотность распределения

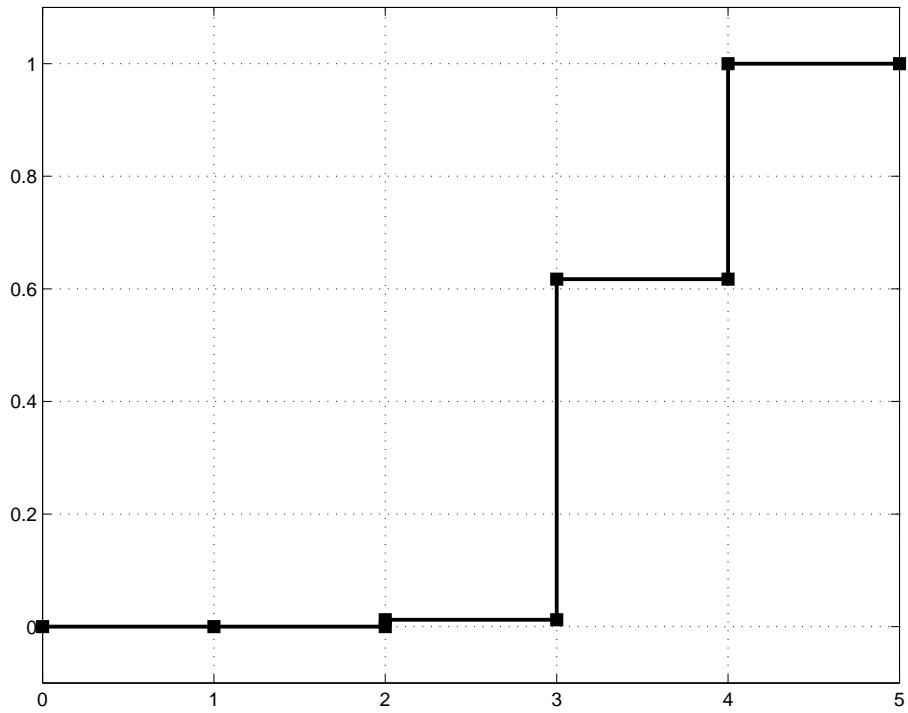


Рис. 5.20. Эксперимент №7, функция распределения

Глава 6

Проведение вычислительных экспериментов в теории поверхностных волн

6.1. Вычислительный эксперимент: построение бегущих волн

В разделе 1.7 были приведены уравнения, описывающие бегущие волны на конечной (и бесконечной) глубине. Наши эксперименты имеют два параметра: глубину и скорость бегущей волны. Всего было проведено 6 серий экспериментов.

| Номер эксперимента | Глубина | Скорость |
|--------------------|---------|----------|
| 1 | 0.2 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.3 |
| 3 | 1.0 | 0.8 |
| 4 | 1.0 | 1.0 |
| 5 | 6.0 | 1.1 |
| 6 | 6.0 | 1.3 |

Приведем логарифмические графики наших экспериментов (рис. 6.1–6.6).

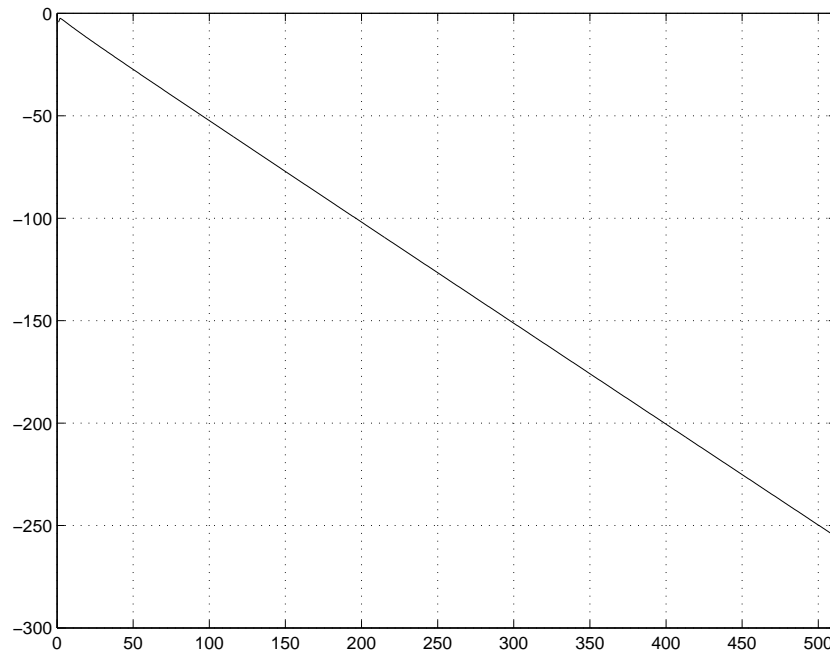


Рис. 6.1. Эксперимент №1: спектр в логарифмическом масштабе

6.2. Вычислительный эксперимент: стоячие волны

Рассмотрим поверхностные волны, у которых горизонтальная координата поля скоростей равна нулю. В частности, рассмотрим динамику поверхностных волн, выбрав в качестве начальных условий отклонение свободной поверхности и нулевое распределение скоростей. Как мы увидим, такие волны являются периодическими во времени. Это один из самых простых режимов динамики поверхностных волн, который очень удобен для тестирования наших программ.

В этом эксперименте будем использовать программу без применения быстрого преобразования Фурье.

Опишем параметры нашего вычислительного эксперимента.

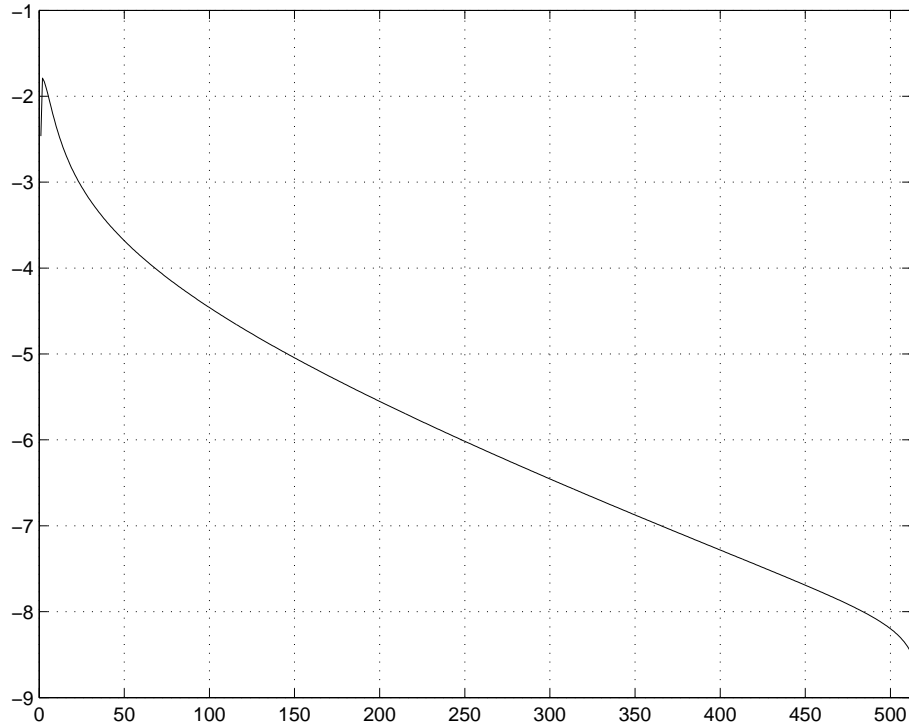


Рис. 6.2. Эксперимент №2: спектр в логарифмическом масштабе

Количество гармоник, участвующих в расчете $N = 512$.

Шаг по времени $\tau = 0.004$.

Ускорение свободного падения $g = 1.0$.

Начальное условие $R(u, 0) = 1 + 0.1e^{-iu}$, $V(u, 0) = 0$.

Приведем профиль начальной волны при $t = 0$ на рис. 6.7. На рис. 6.8 дан спектр решения при $t = 60$. Приведем и профиль волны при $t = 60$ на рис. 6.9.

Продолжим наш эксперимент. На рис. 6.10 и 6.11 приведем спектр и профиль волны при $t = 150$. Для контроля наших вычислений приведем график изменения полной энергии на рис. 6.12. В реальности полная энергия сохраняется, поэтому наблюдаемые колебания на рис. 6.12 это следствия погрешностей вычислений. Однако тот факт, что средний уровень

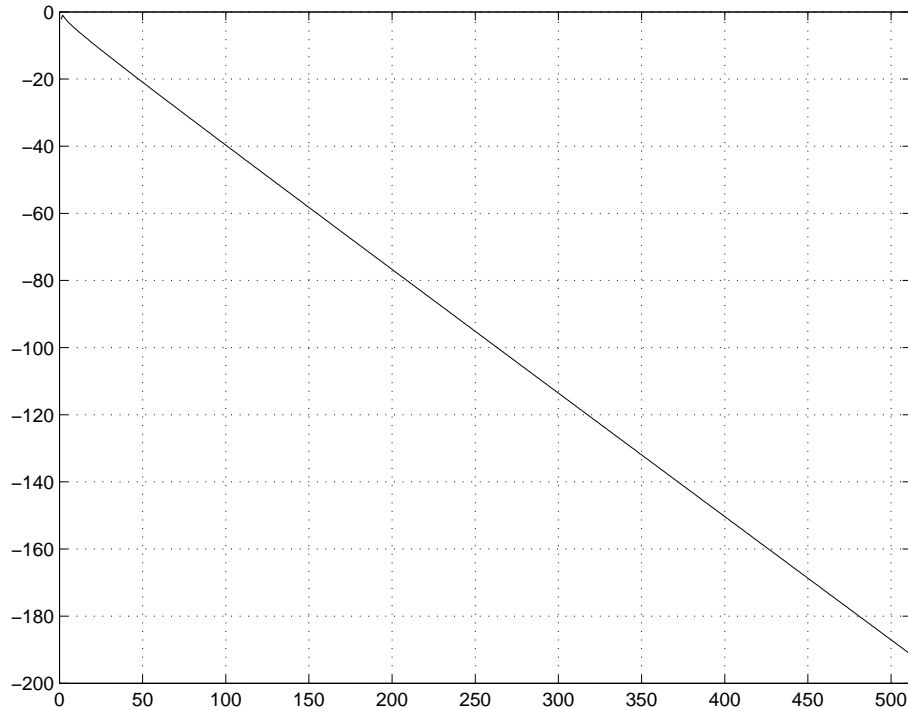


Рис. 6.3. Эксперимент №3: спектр в логарифмическом масштабе

наблюдаемой полной энергии остается одинаковым, а колебания относительно невелики (в рамках погрешностей), подтверждает достоверность наших вычислений. Для того чтобы представить динамику наших волн, приведем на рис. 6.13 изменение потенциальной и кинетической энергий. Поскольку потенциальная и кинетическая энергии сильно осциллируют, приведем лишь первые 50 отсчетов. Как и следовало ожидать, в случае стоячих волн уровни кинетической и потенциальной энергий находятся в противофазе. Максимум потенциальной энергии соответствует минимуму (равной нулю) кинетической энергии, и наоборот.

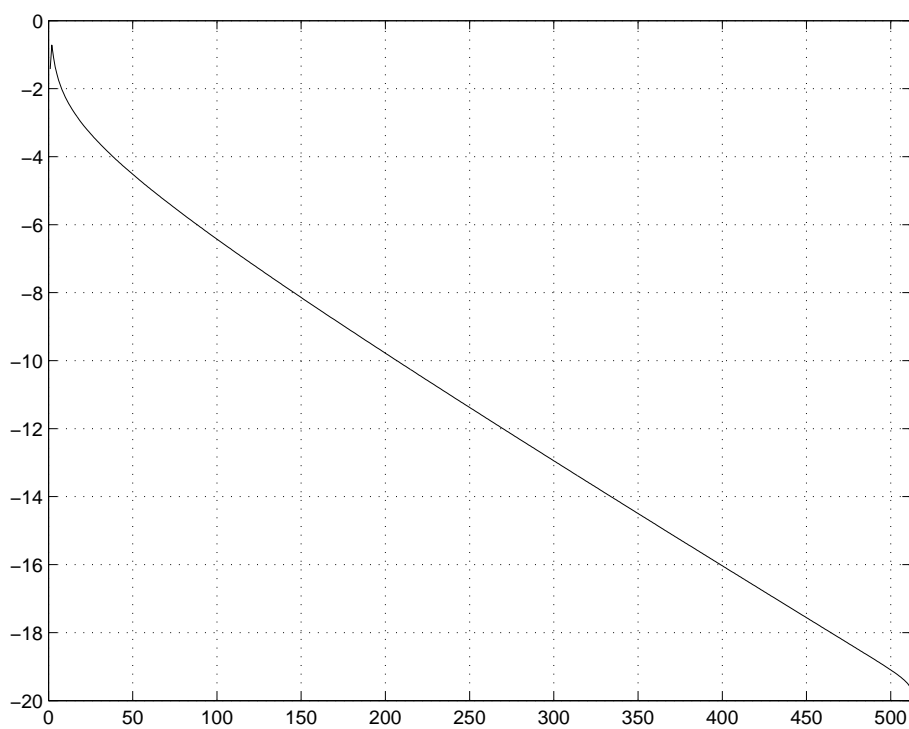


Рис. 6.4. Эксперимент №4: спектр в логарифмическом масштабе

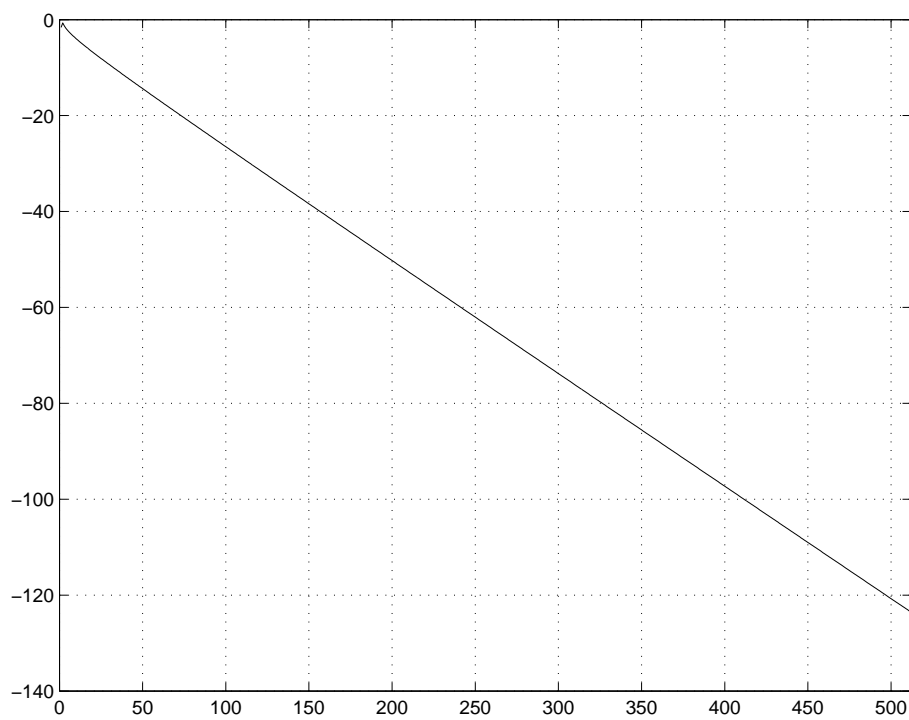


Рис. 6.5. Эксперимент №5: спектр в логарифмическом масштабе

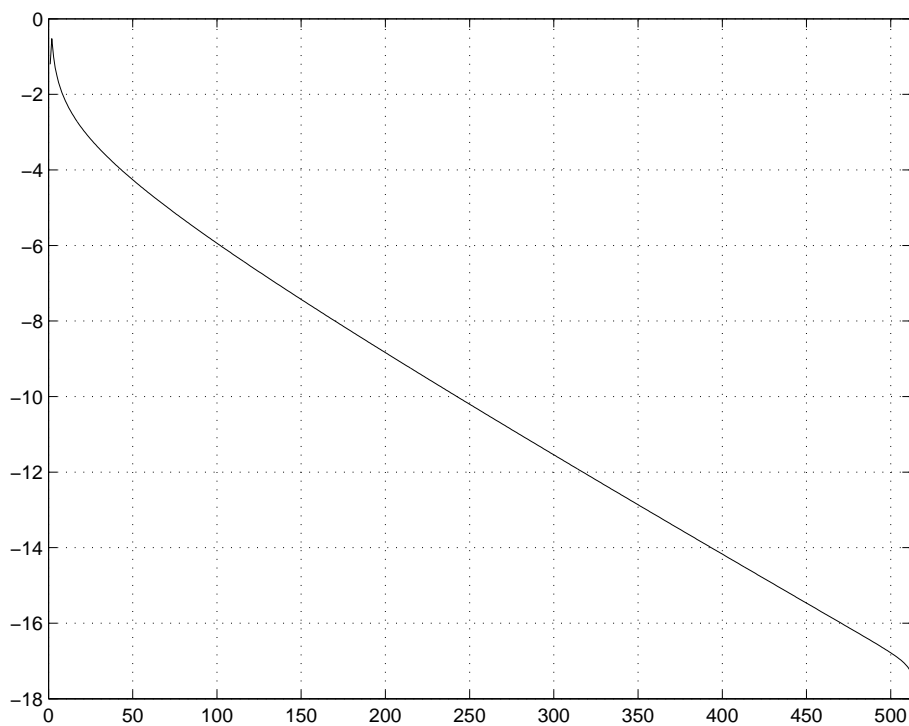


Рис. 6.6. Эксперимент №6: спектр в логарифмическом масштабе

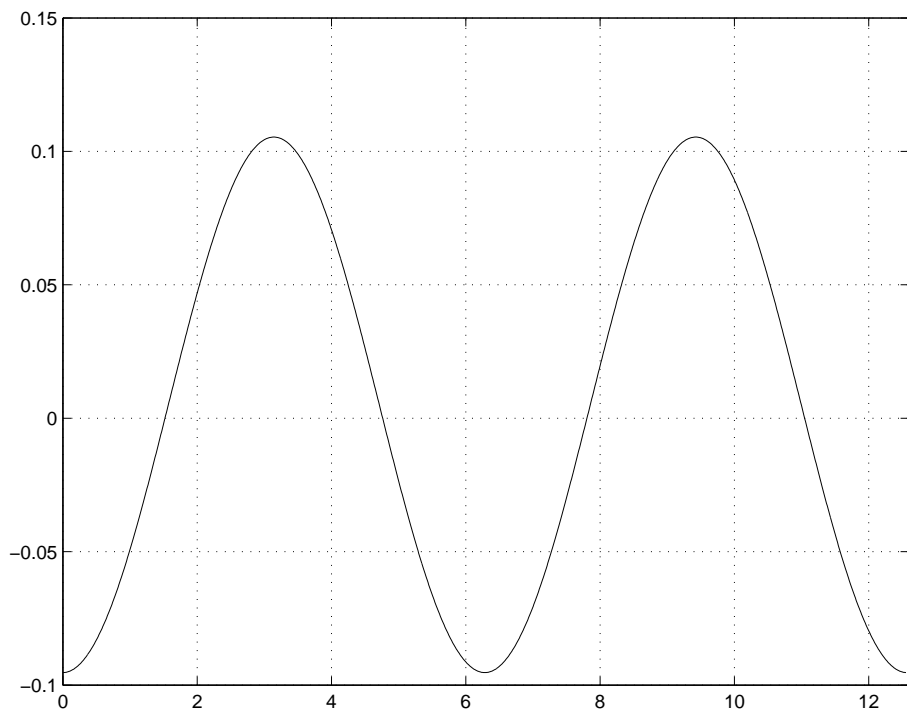


Рис. 6.7. Профиль начальной волны при $t = 0$

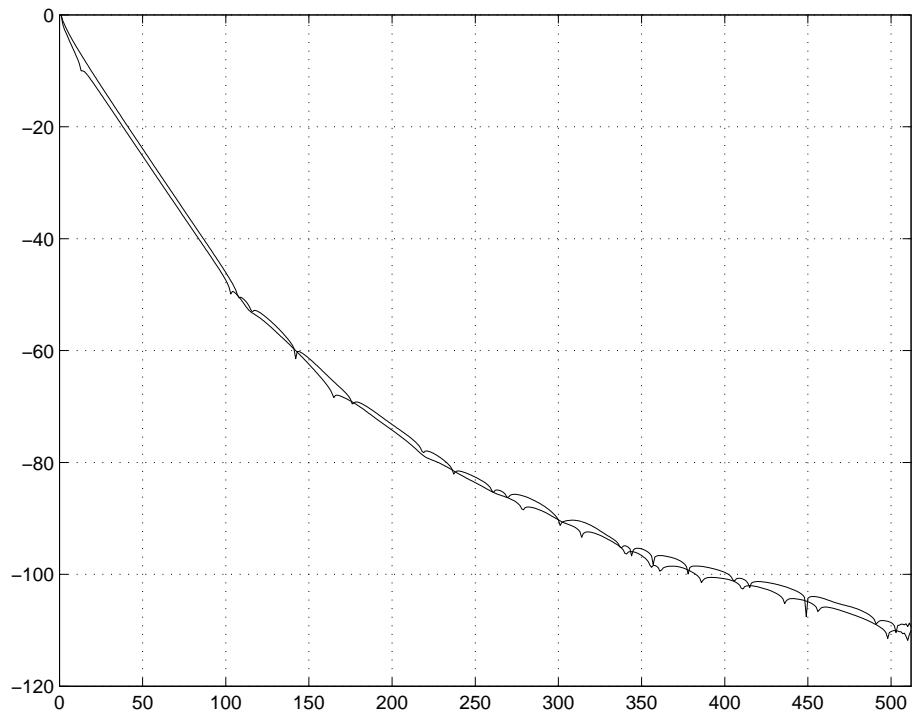


Рис. 6.8. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 60$

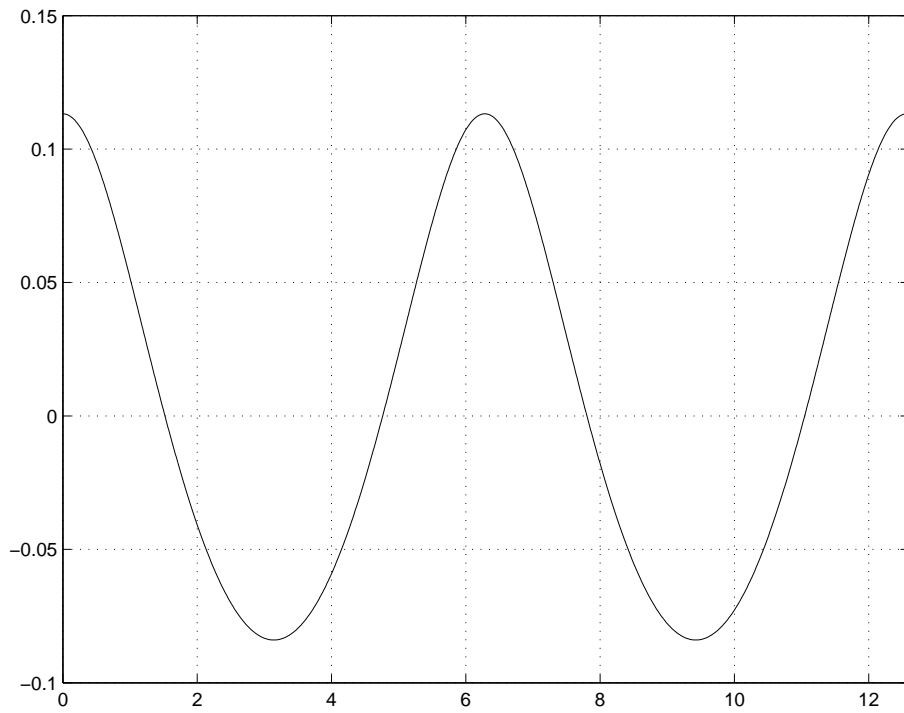


Рис. 6.9. Профиль волны при $t = 60$

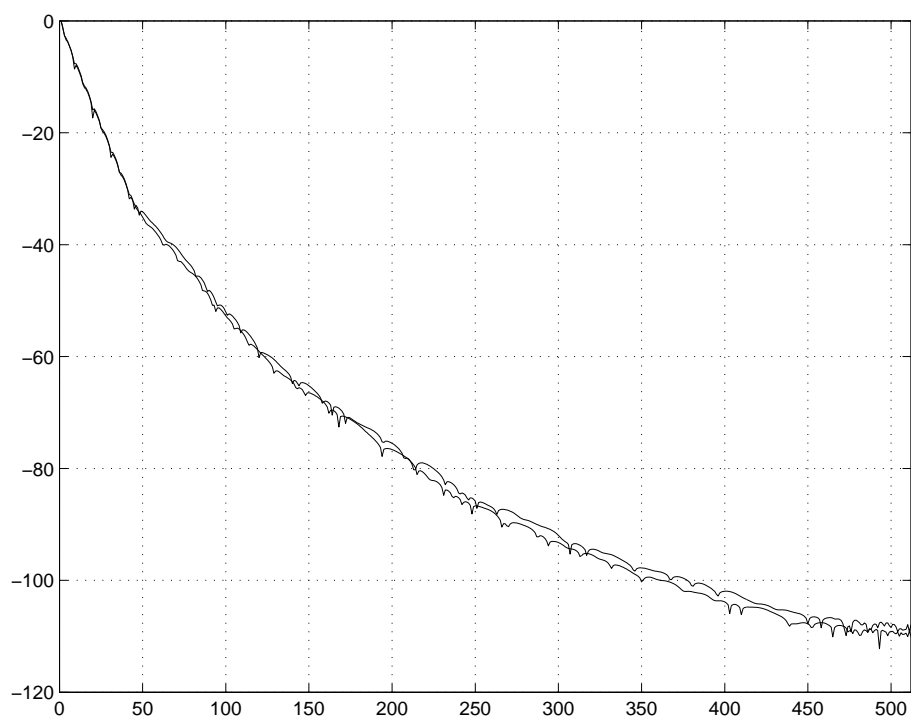


Рис. 6.10. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 150$

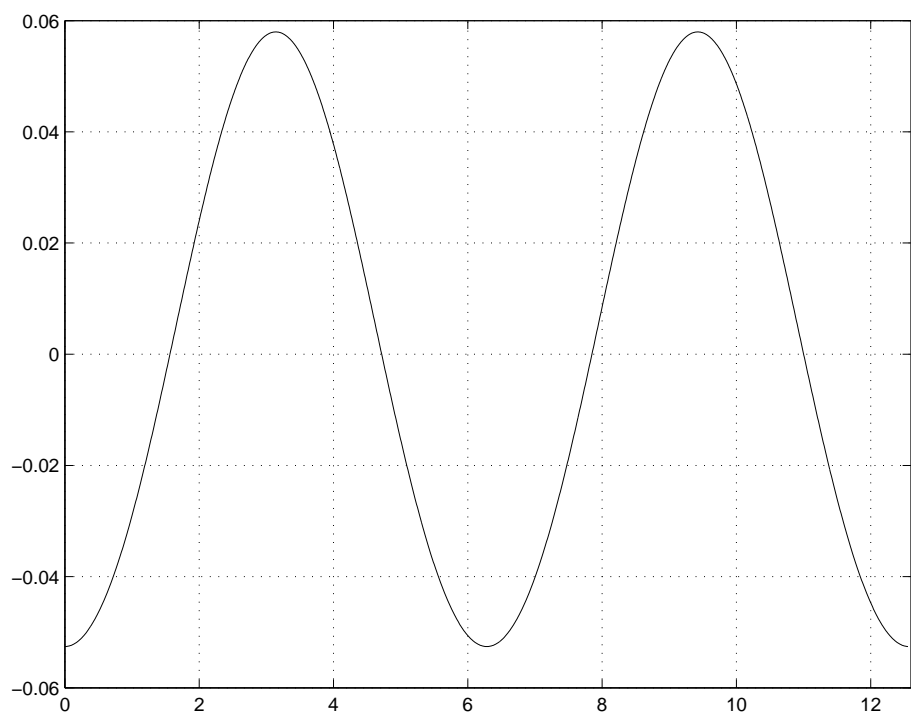


Рис. 6.11. Профиль волны при $t = 150$

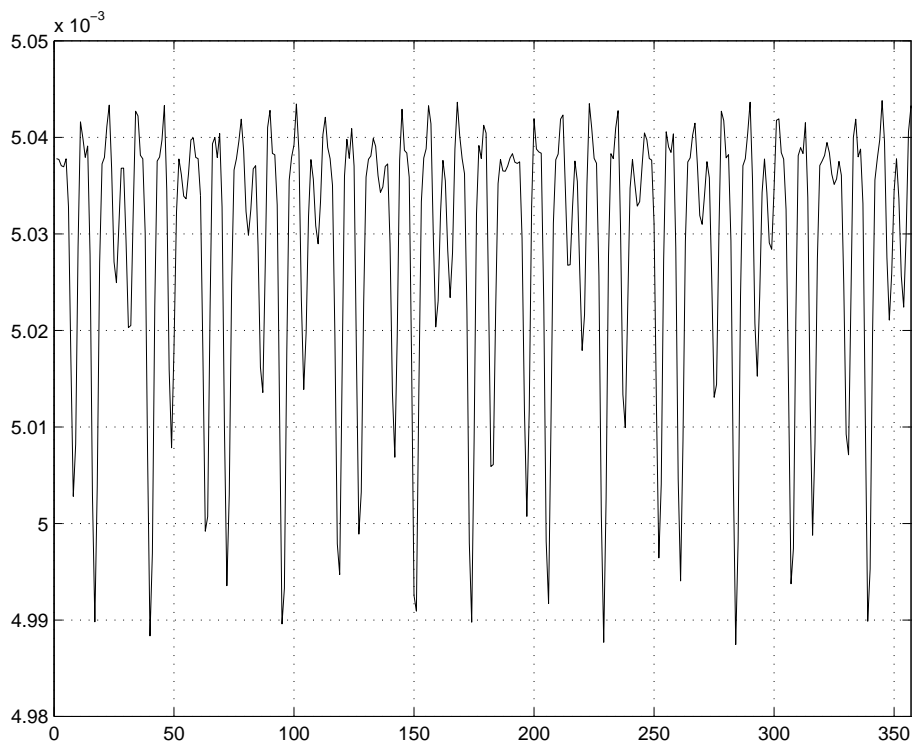


Рис. 6.12. Изменение энергии в расчетах стоячих волн

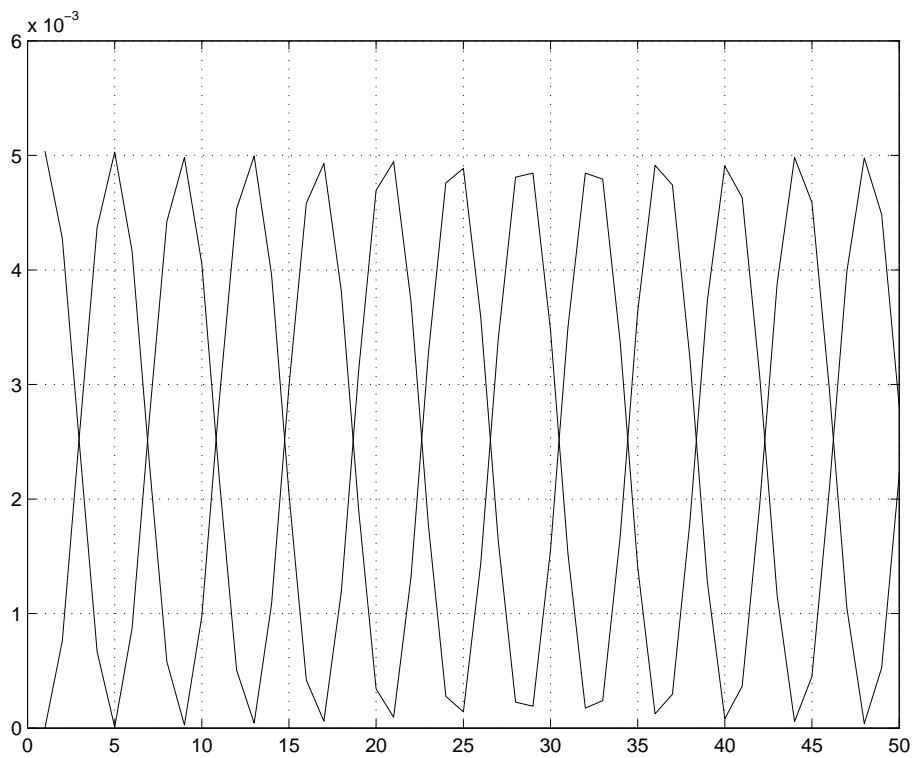


Рис. 6.13. Потенциальная и кинетическая энергии в расчетах стоячих волн

6.3. Вычислительный эксперимент: стационарные волны

Еще в середине XIX в. Стоксом были исследованы стационарные волны. В случае этих волн существует система координат, движущаяся с постоянной скоростью, в которой поверхностные волны неподвижны. Стационарные волны прекрасно подходят для проверки программы для численного решения.

Воспользуемся начальным условием, соответствующим стационарной волне, сообщенным нам А.И. Дьяченко. Файл с этими начальными условиями можно найти на сайте <http://www.calcs.ru/>.

Для расчетов будем использовать программу с применением быстрого преобразования Фурье.

Опишем параметры нашего вычислительного эксперимента.

Количество гармоник, участвующих в расчете : $N = 1024$.

Шаг по времени : $\tau = 0.004$.

Ускорение свободного падения : $g = 1.0$.

Начальное условие : стационарное решение.

Приведем профиль начальной волны и спектр решения при $t = 0$ на рис. 6.14, 6.15. Поскольку наша цель состоит в проверке нашей программы, проведем расчеты на большом временном интервале. На рис. 6.16 и 6.17 приведем профиль волны и спектр решения при $t = 7000$. Это соответствует примерно тысячи периодов. Мы видим, что старшие гармоники спектра несколько возрастают вследствие погрешностей вычислений. Однако это возрастание не носит катастрофического характера, и счет может быть

продолжен. Еще одним контролем корректности наших расчетов является контроль энергии. На рис. 6.18 приводим график полной, кинетической и потенциальной энергий. Мы видим, что уровень энергии и полной, и кинетической, и потенциальной остается одинаковым со временем. Это согласуется с динамикой стационарных волн.

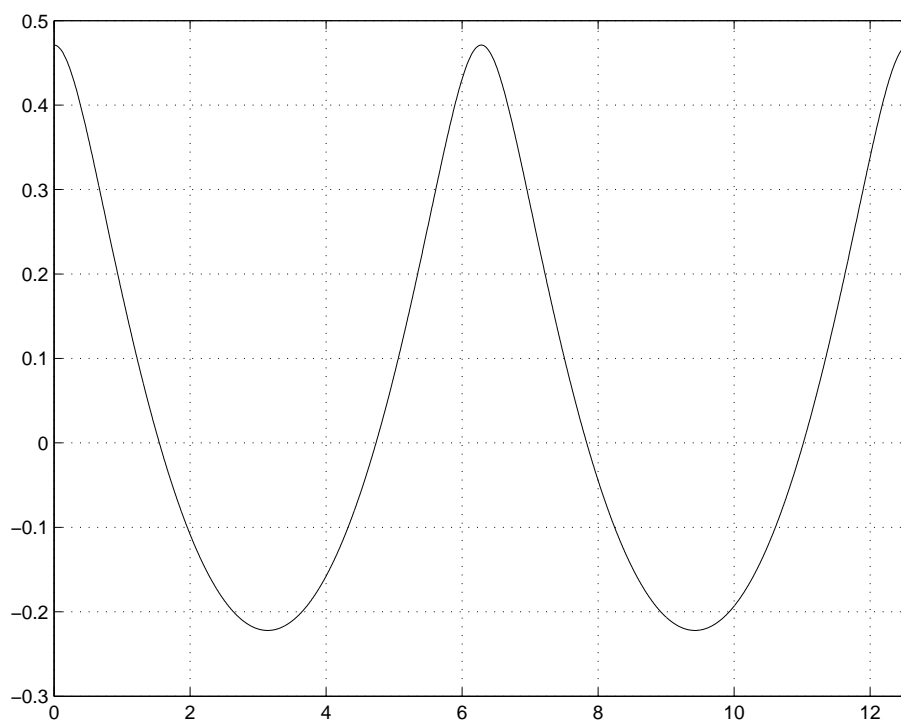


Рис. 6.14. Профиль начальной волны при $t = 0$

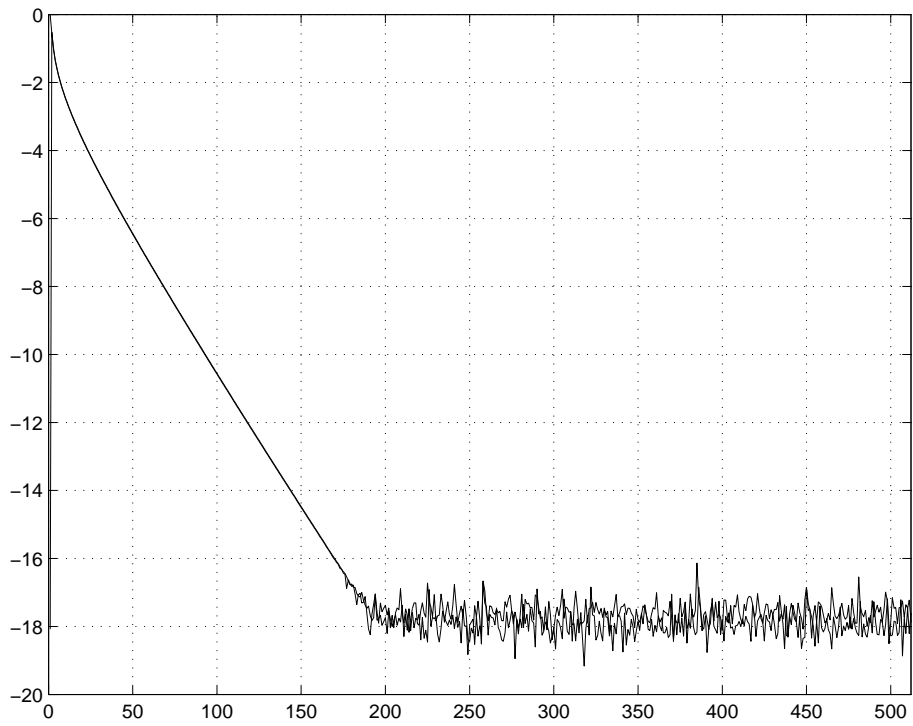


Рис. 6.15. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 0$

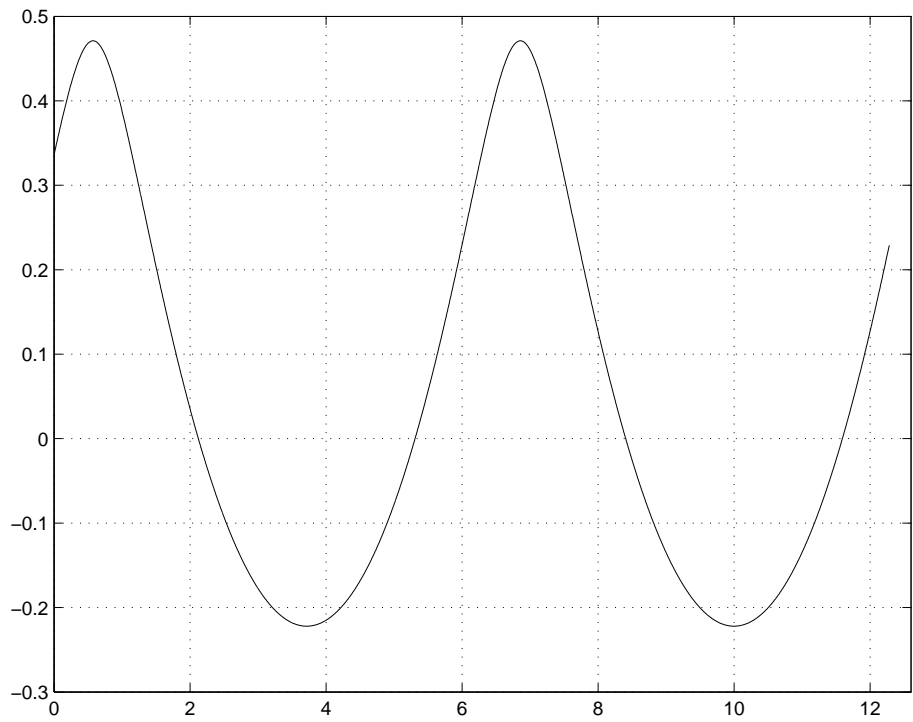


Рис. 6.16. Профиль волны при $t = 7000$

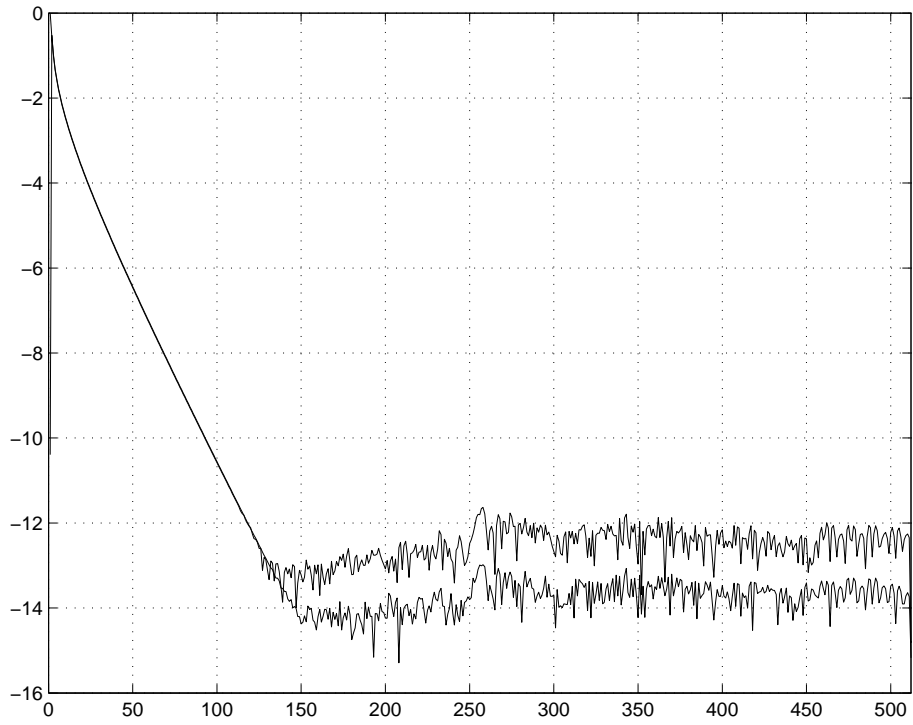


Рис. 6.17. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 7000$

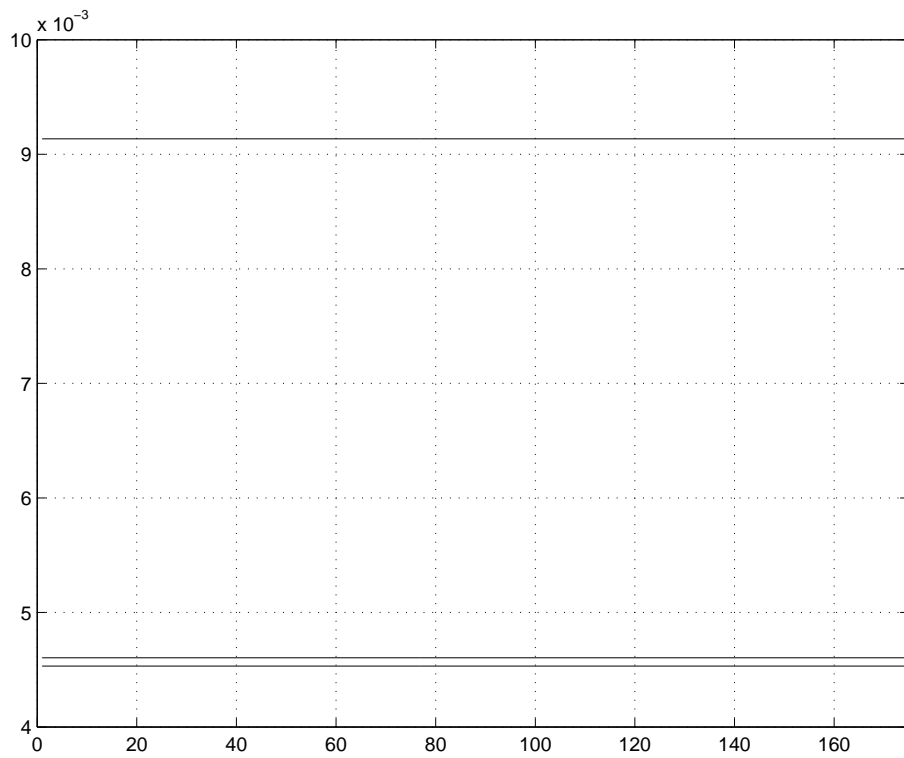


Рис. 6.18. Уровень энергии

6.4. Моделирование обрушивающейся волны

В предыдущих вычислительных экспериментах рассматривалось поверхностные волны, которые существуют при всех $t \geq 0$. Как правило, поверхностные волны идеальной жидкости имеют обыкновение обрушиваться либо у этих волн возникают особенности за конечное время. В настоящем эксперименте проведем моделирование обрушивающейся волны. Поскольку время существования решений, описывающих эти волны, конечно, то применим методы оценки времени существования решений, которые были разработаны в главе 4.

Рассмотрим пример обрушающейся волны из работы [48] и сравним качественные и количественные результаты.

В этом вычислительном эксперименте будем использовать программу расчета поверхностных волн с применением быстрого преобразование Фурье.

Опишем параметры нашего вычислительного эксперимента.

Количество гармоник, участвующих в расчете $N = 4096$.

Шаг по времени $\tau = 0.0001$.

Ускорение свободного падения $g = 10.0$.

Начальное условие $R(u, 0) = 1 + 0.28e^{-iu}$, $V(u, 0) = -0.28\sqrt{g}e^{-iu}$.

В работе [48] утверждается, что у волны, с этим начальным условием, образуется особенность за время порядка $t = 2.0$. Проверим это утверждение с помощью оценочных функционалов, которые мы ввели в главе 4.

Первым делом приведем профиль начальной волны на рис. 6.19.

Начнем расчеты по указанной схеме и приведем спектр решений и профили поверхностных волн на рис. 6.20–6.27. Для контроля вычислений при-

ведем график энергий: кинетической, потенциальной и полной на рис. 6.28.

Из рассмотрения поведения спектра решения можно сделать эмпирический вывод, что у решения возникает особенность при $t = 2.0$. Используя оценочные функционалы, введенные в главе 4, мы можем подтвердить этот вывод доказательно. Приведем графики функции ν_k^N от решений R и V при различных значениях t рис. 6.28–6.32. Мы видим, что при значениях $t = 0.5$, $t = 1.0$, $t = 1.5$ значения оценочных функционалов отделены от нуля. А при $t = 2.0$ наблюдаем стремление оценочного функционала к нулю, что говорит об образовании особенности у решений при $t = 2.0$. Дальнейшие вычисления этого решения проводить уже нельзя.

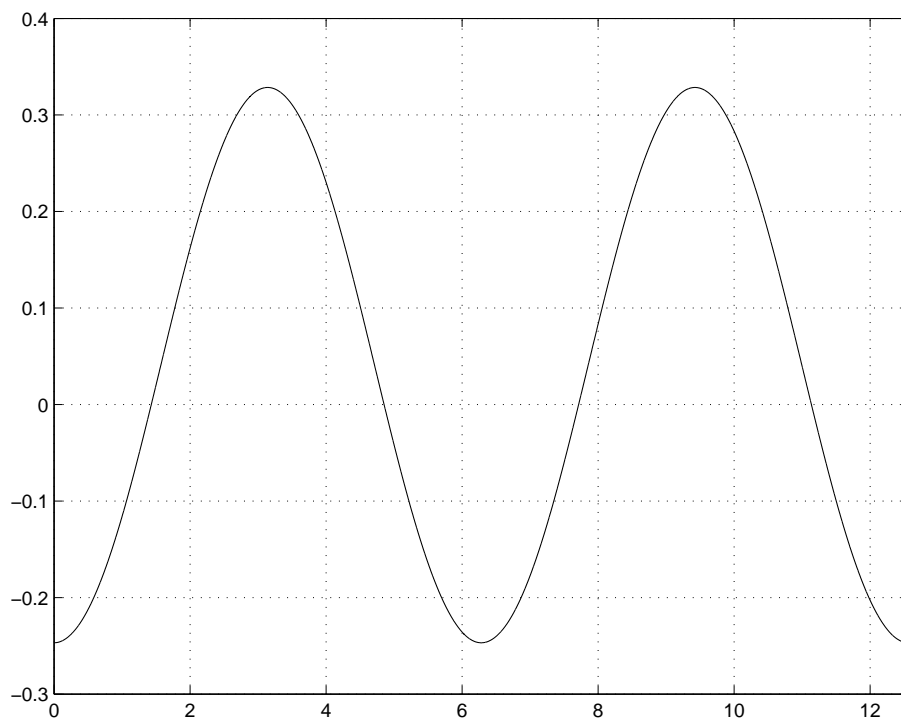


Рис. 6.19. Профиль начальной волны

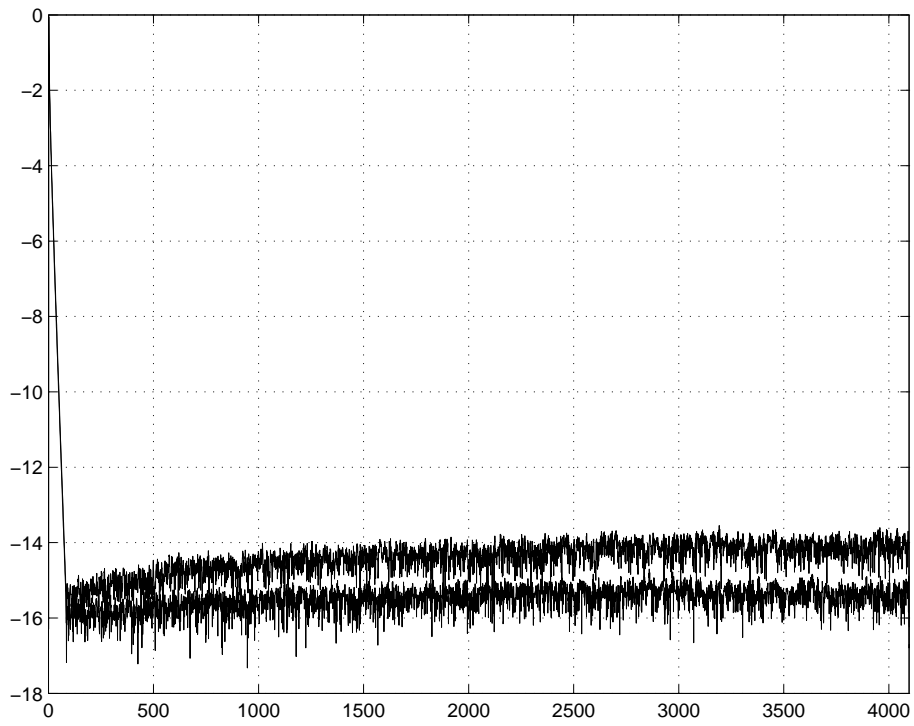


Рис. 6.20. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 0.50$

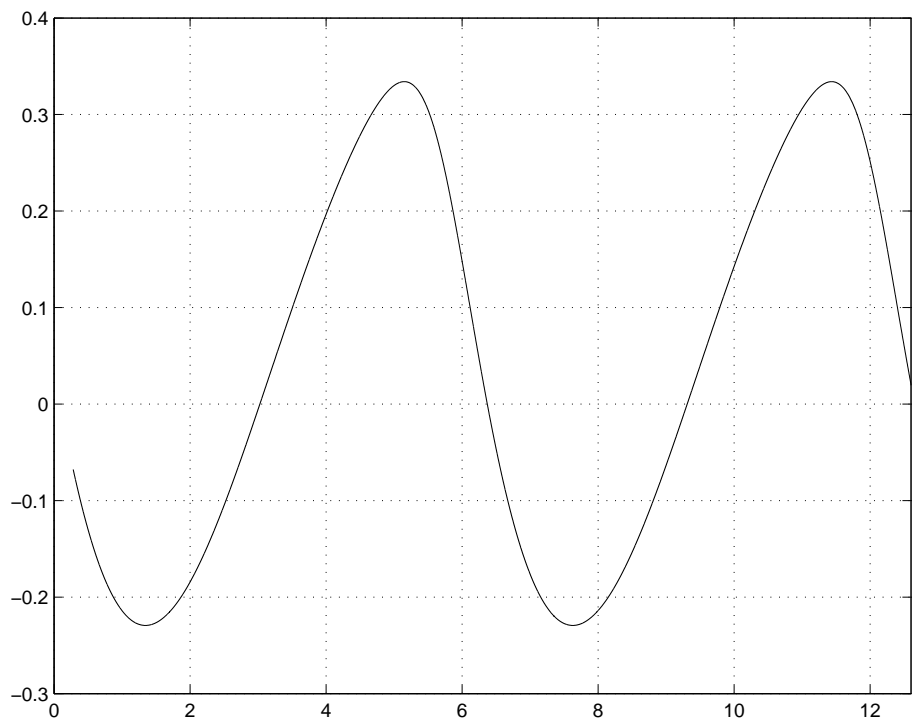


Рис. 6.21. Профиль волны при $t = 0.50$

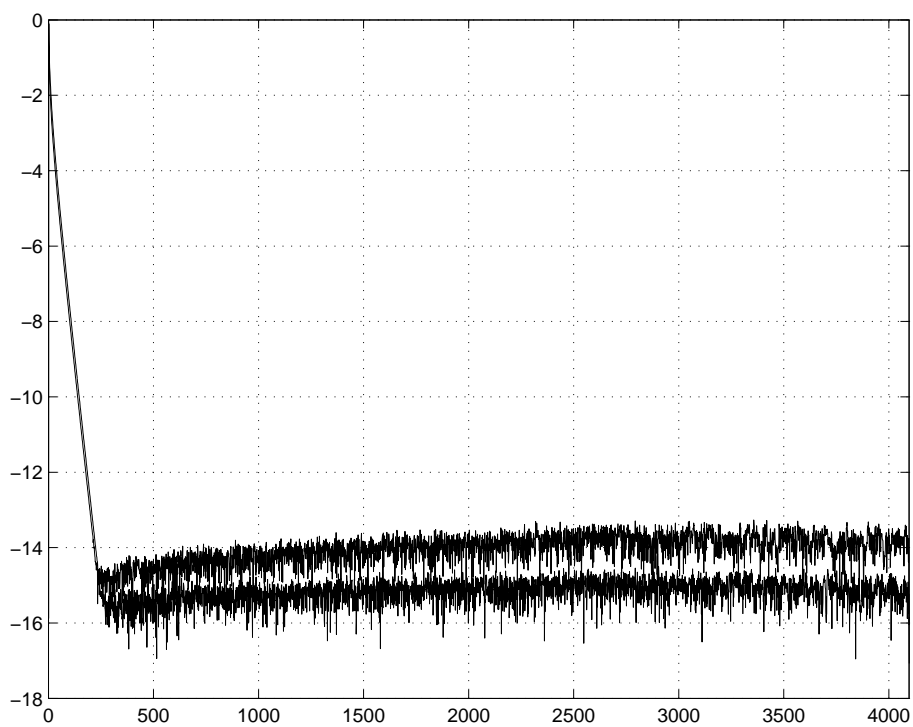


Рис. 6.22. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1.0$

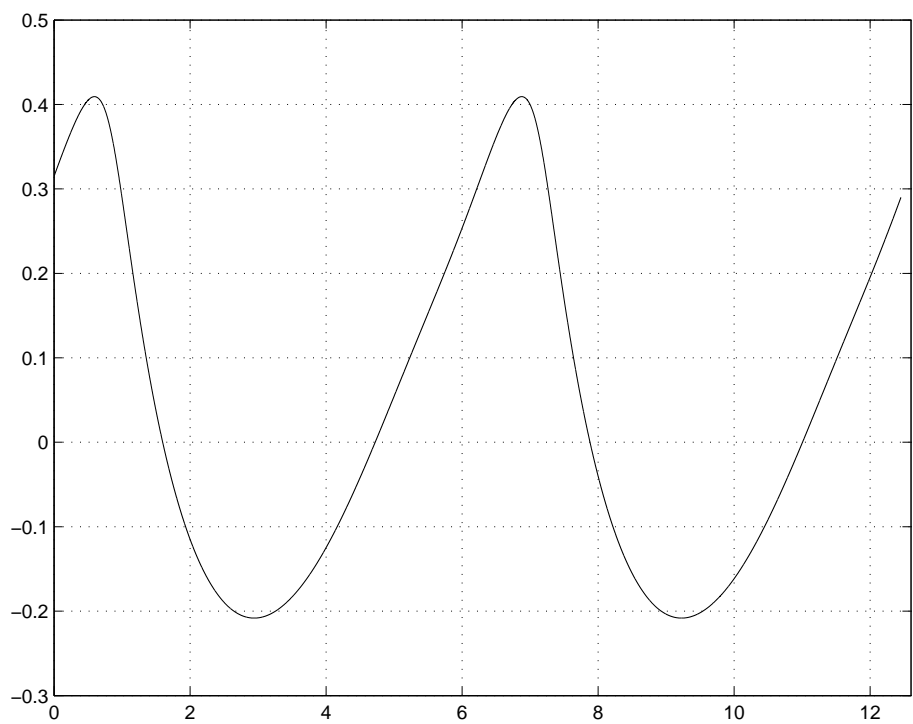


Рис. 6.23. Профиль волны при $t = 1.0$

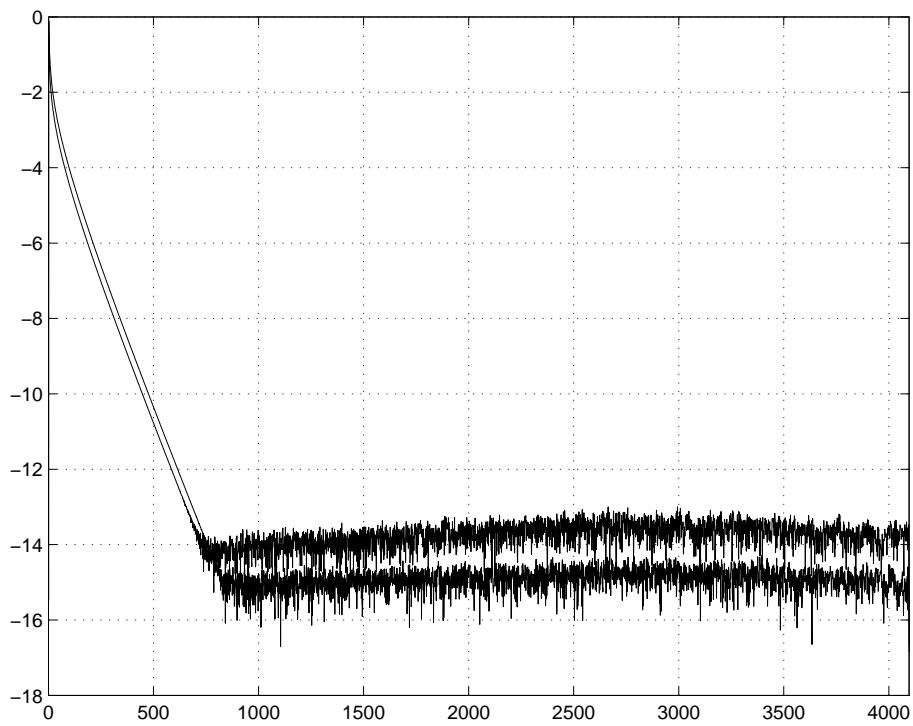


Рис. 6.24. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1.5$

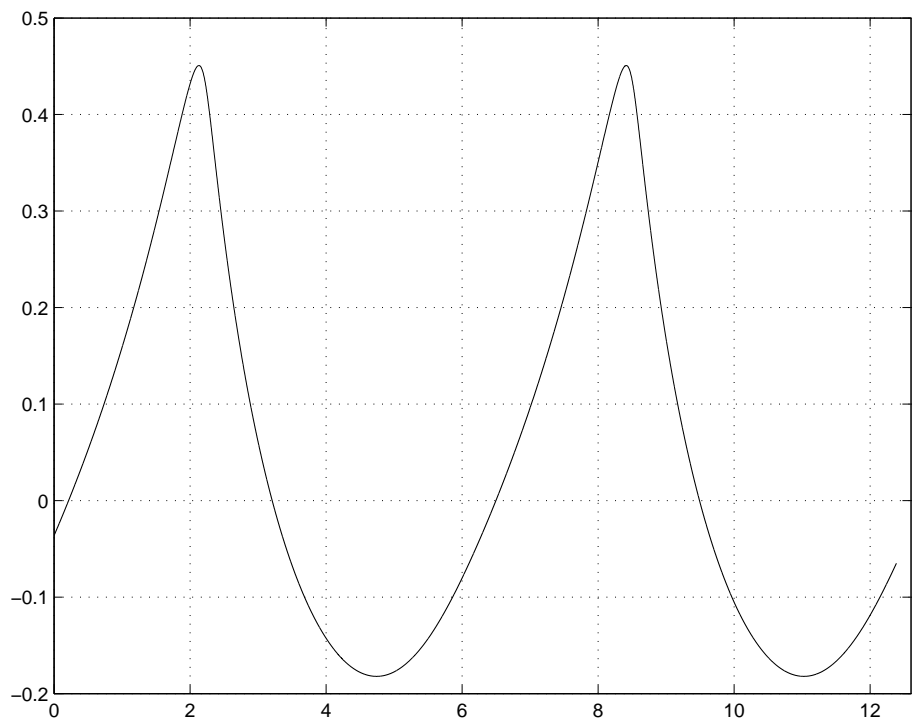


Рис. 6.25. Профиль волны при $t = 1.5$

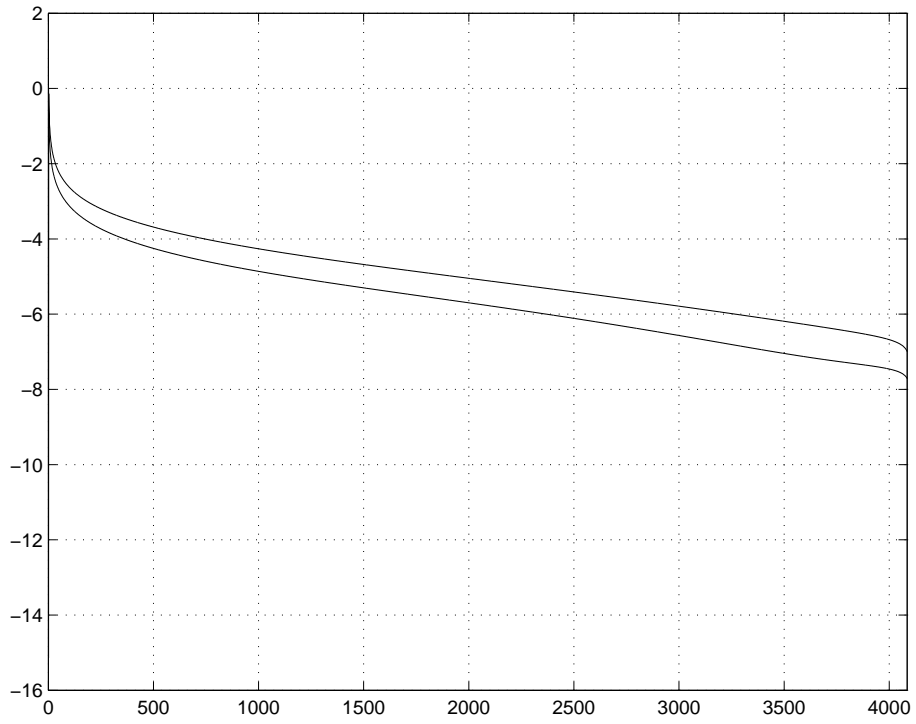


Рис. 6.26. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 2.0$

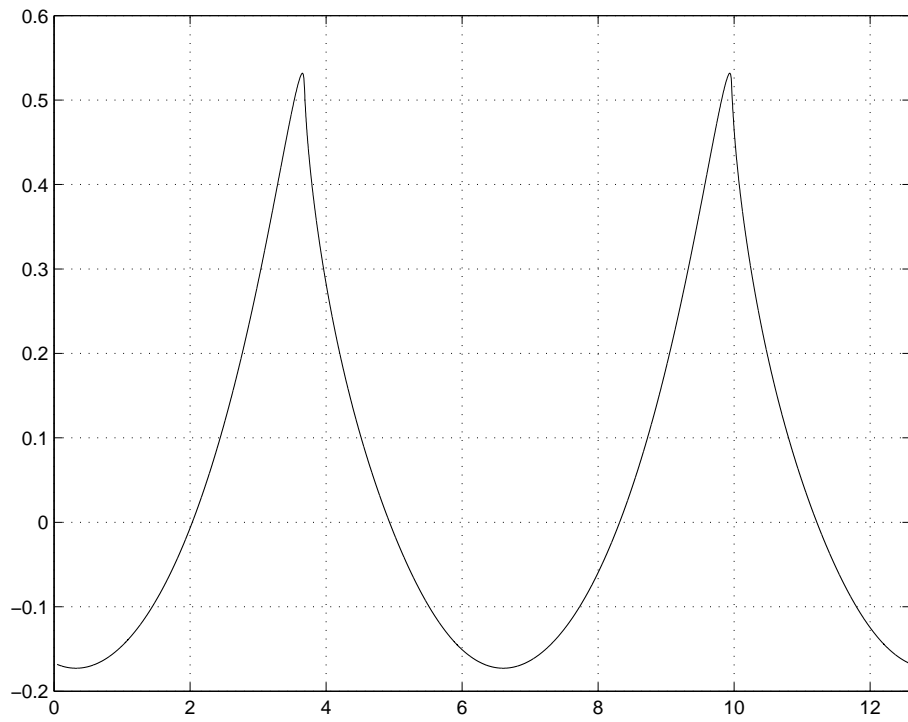


Рис. 6.27. Профиль волны при $t = 2.0$

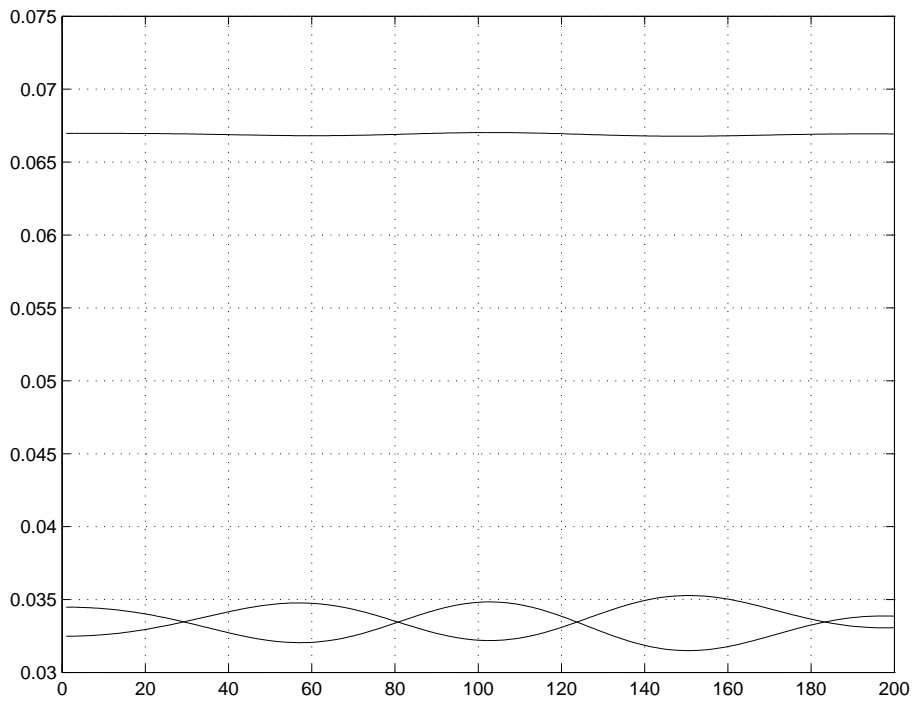


Рис. 6.28. Изменение энергии при моделировании обрушивающейся волны

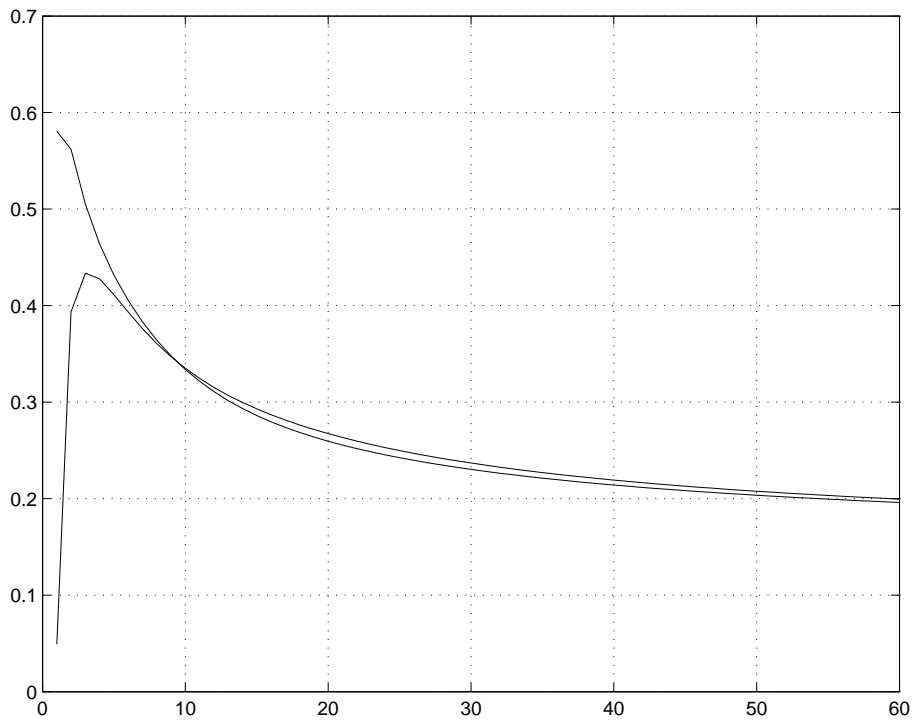


Рис. 6.29. Значения оценочного функционала при $t = 0.50$

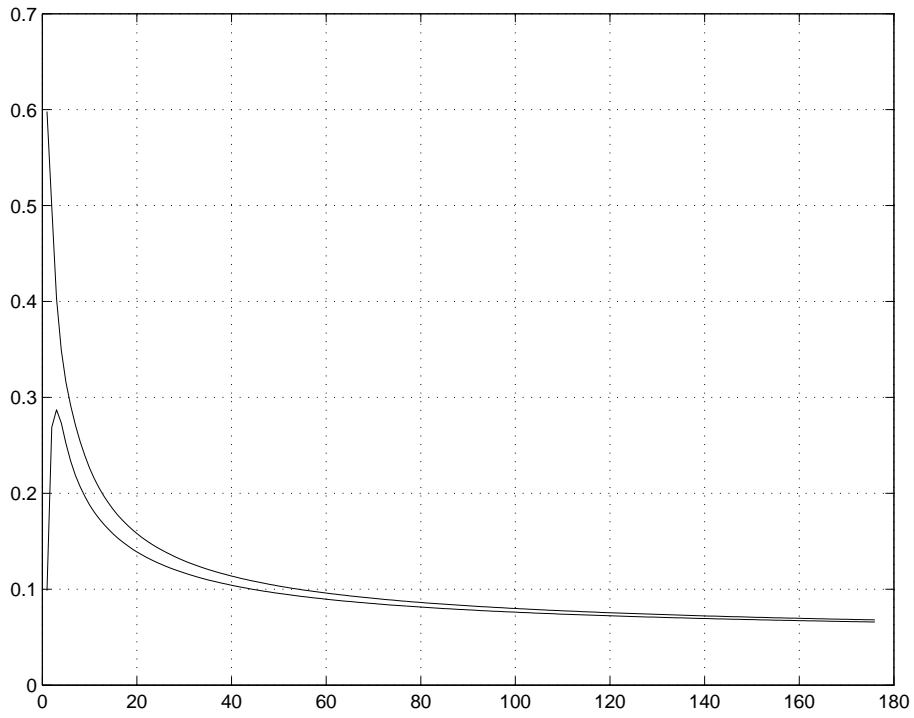


Рис. 6.30. Значения оценочного функционала при $t = 1.00$

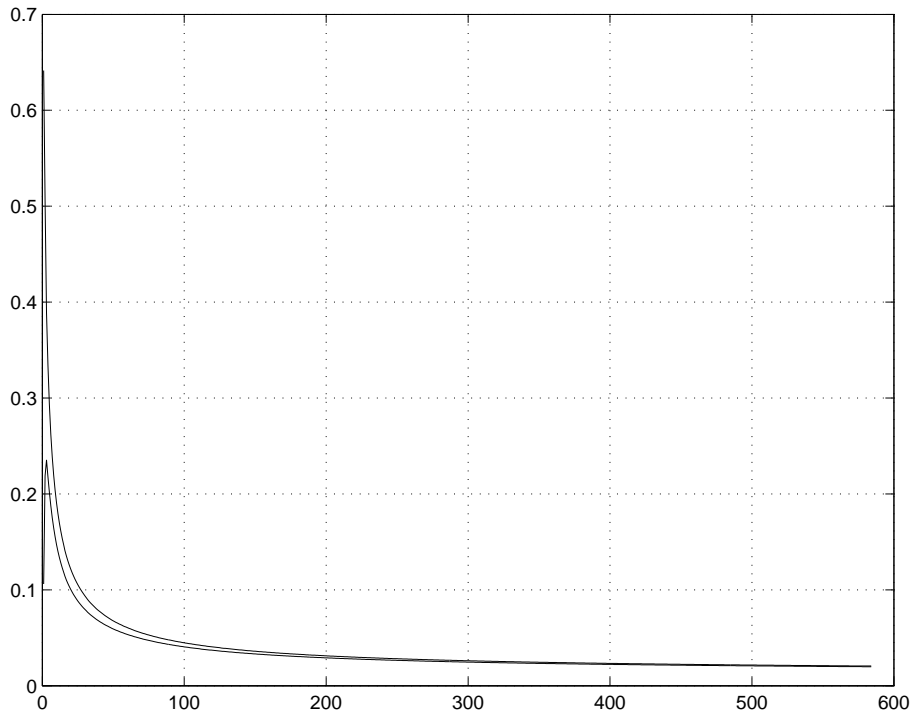


Рис. 6.31. Значения оценочного функционала при $t = 1.50$

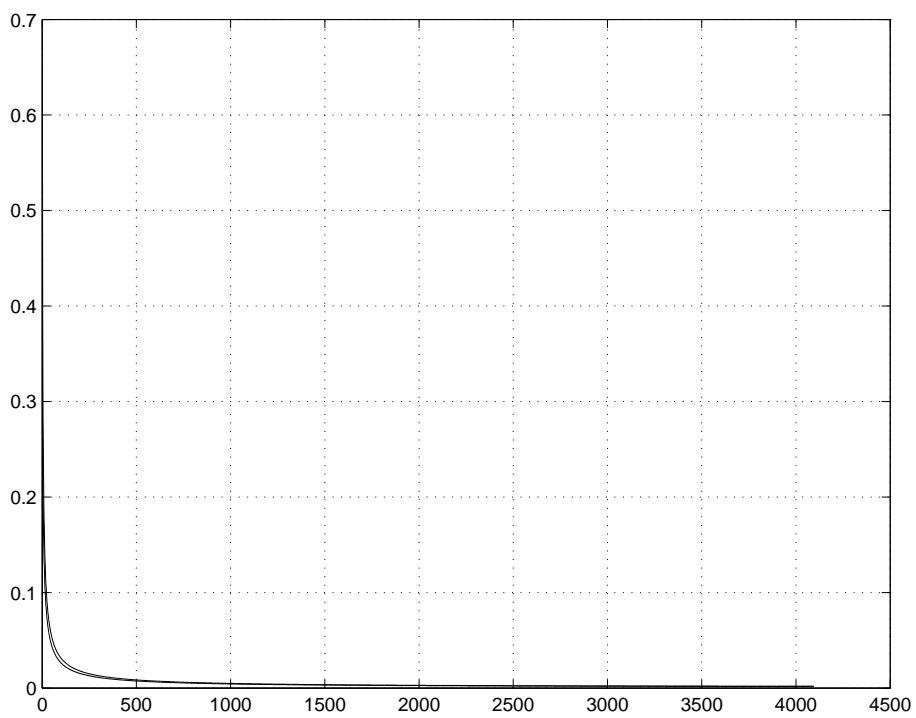


Рис. 6.32. Значения оценочного функционала при $t = 2.00$

6.5. Моделирование неустойчивости Релея-Тейлора

Под неустойчивостью Релея-Тейлора мы понимаем течение жидкости (в нашем случае идеальной) со свободной поверхностью, когда ускорение свободного падения имеет отрицательное значение. Физически это эквивалентно рассмотрению интерфейса: тяжелая жидкость — вакуум, когда жидкость находится сверху. Модель релей-тейлоровской неустойчивости не имеет непосредственного отношения к задачам океанологии, но играет большую роль в теории гидродинамики со свободной поверхностью. Используем эту модель для апробации наших методов оценки времени существования решений, поскольку решения, соответствующие релей-тейлоровской неустойчивости, быстро разрушаются.

Как следует из самого названия, течение Релея-Тейлора является неустойчивым по физике дела. Впервые это течение было рассмотрено в работе [43].

Численное решение неустойчивых задач представляет собой сложную задачу. Регуляризации некорректных (неустойчивых) задач посвящена отдельная наука. В главе 3 нами использованы некоторые факты теории некорректных задач для доказательства сходимости численных схем. Однако из этого, вообще говоря, еще не следует, что процедуры, разработанные ранее, можно «безболезненно» применять в случае релей-тейлоровской неустойчивости. Например, применение программы, с использованием быстрого преобразования Фурье приводит к быстрому разрушению численной схемы из-за ошибок округления. В то же время, если использовать программу «без БПФ», то можно наблюдать развитие неустойчивости Релея-Тейлора благодаря удачной форме уравнений Дьяченко.

Опишем параметры нашего вычислительного эксперимента.

Количество гармоник, участвующих в расчете $N = 1024$.

Шаг по времени $\tau = 0.001$.

Ускорение свободного падения $g = -10.0$.

Начальное условие $R(u, 0) = 1 + 0.01e^{-iu}$, $V(u, 0) = 0$.

Вычисления проводим программой, не использующей быстрое преобразование Фурье. Профиль начальной волны не сильно отличается от предыдущих начальных условий. Приводим его на рис. 6.33. При $t = 1.0$ мы видим увеличение амплитуды профиля поверхностной волны на рис. 6.34. При этом спектр решения в логарифмическом масштабе ведет себя как линейная функция, это означает, что на данном этапе решение еще представлено аналитическими функциями рис. 6.35. Продолжим счет. Рассмотрим профиль и логарифмический спектр решения при $t = 1.5$ (рис. 6.36, 6.37). Амплитуда профиля поверхностной волны продолжает расти, при этом мы наблюдаем характерное для неустойчивости Релея-Тейлора вытягивание горбов. Спектр решения в логарифмическом масштабе до сих пор демонстрирует линейную форму. Однако дальнейший счет приводит к быстрому разрушению решения. Действительно, рассмотрим профиль поверхностной волны и спектр уже при $t = 1.6$ на рис. 6.38, 6.39. Дальнейший счет становится практически невозможным из-за катастрофического развала решения. Понять, что мы «подошли к краю решения», можно из графиков оценочных функционалов на рис. 6.40, 6.41, 6.42.

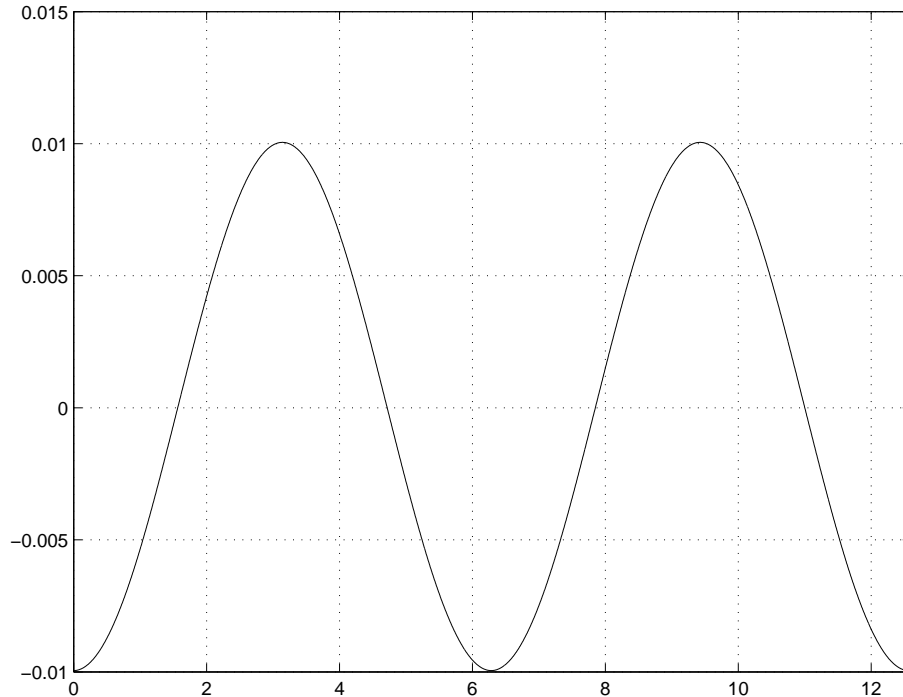


Рис. 6.33. Начальное условие

6.6. Моделирование динамики по идеальной жидкости в условиях вибрации

В предыдущем разделе мы рассматривали численные эксперименты по развитию неустойчивости Релея-Тейлора. Было показано, что решения, соответствующие этим моделям, быстро разрушаются. В настоящем разделе рассмотрим динамику идеальной жидкости со свободной поверхностью в условиях вибрации. Если в экспериментах по неустойчивости Релея-Тейлора значение ускорения свободного падения было отрицательным, то в настоящих экспериментах это значение будет меняться периодически по гармоническому закону.

В рассматриваемых экспериментах с переменным ускорением силы тяжести величина g принимает как положительные, так и отрицательные значения, поэтому в этом случае также наблюдается неустойчивость Релея-

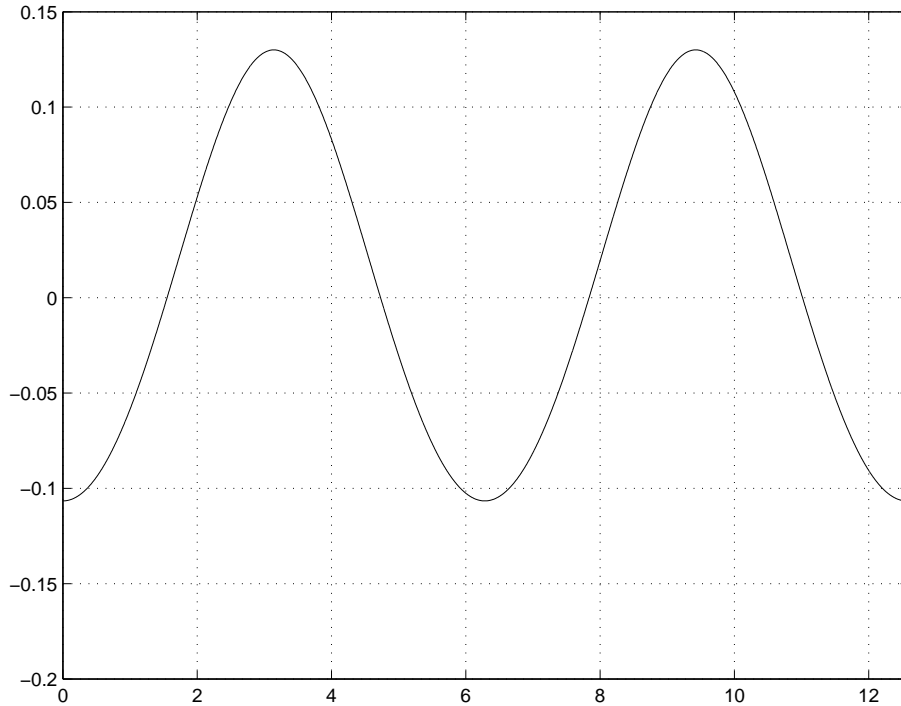


Рис. 6.34. Профиль поверхностной волны при $t = 1.0$

Тейлора, и решения разрушаются.

Опишем параметры нашего первого вычислительного эксперимента.

Количество гармоник, участвующих в расчете $N = 256$.

Шаг по времени $\tau = 0.001$.

Начальное условие $R(u, 0) = 1 + 0.01e^{-iu}$, $V(u, 0) = 0$.

Закон изменения ускорения силы тяжести

$$g(t) = 10.0 + 20.0 * \sin(5t).$$

Вычисления проводим программой, не использующей быстрое преобразование Фурье. Профиль начальной волны выбран таким же, как и в экспериментах, описанных в разделе 6.5 (см. рис. 6.33).

На рис. 6.43 приведен профиль поверхности при $t = 3.6$. Спектр решения при $t = 3.6$ приведен на рис. 6.44. На рис. 6.45 приведены значения

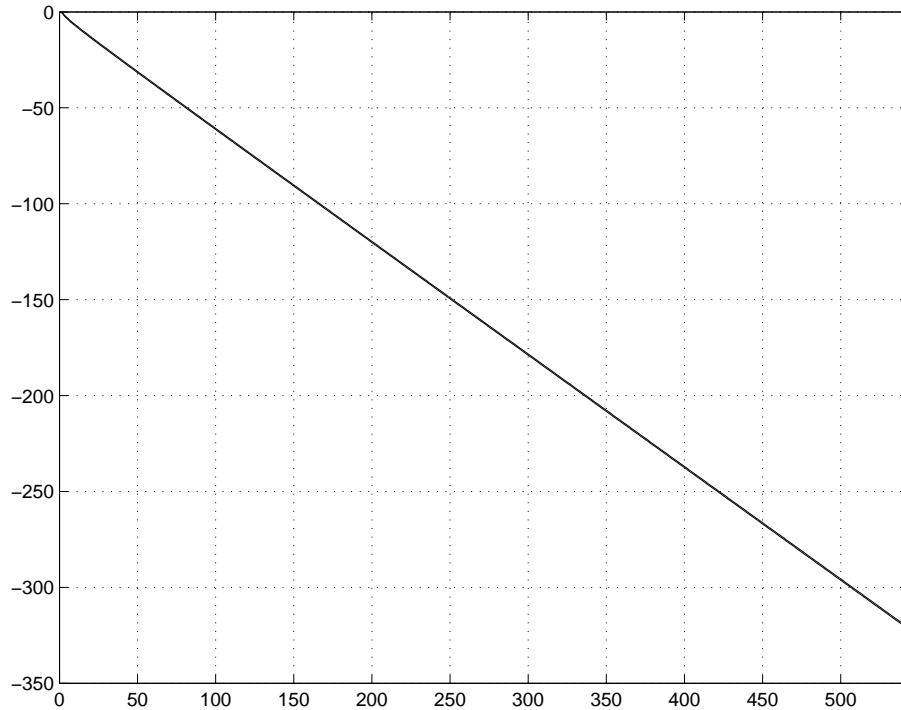


Рис. 6.35. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1.0$

оценочных функционалов.

Приведем параметры нашего второго вычислительного эксперимента.

Количество гармоник, участвующих в расчете $N = 1024$.

Шаг по времени $\tau = 0.001$.

Начальное условие $R(u, 0) = 1 + 0.01e^{-iu}$, $V(u, 0) = 0$.

Закон изменения ускорения силы тяжести

$$g(t) = 10.0 + 20.0 * \sin(25t).$$

В этом эксперименте частота изменения величины g увеличена в 5 раз. Вычисления также проводим программой, не использующей быстрое преобразование Фурье. Профиль начальной волны выбран таким же, как и в предыдущем эксперименте.

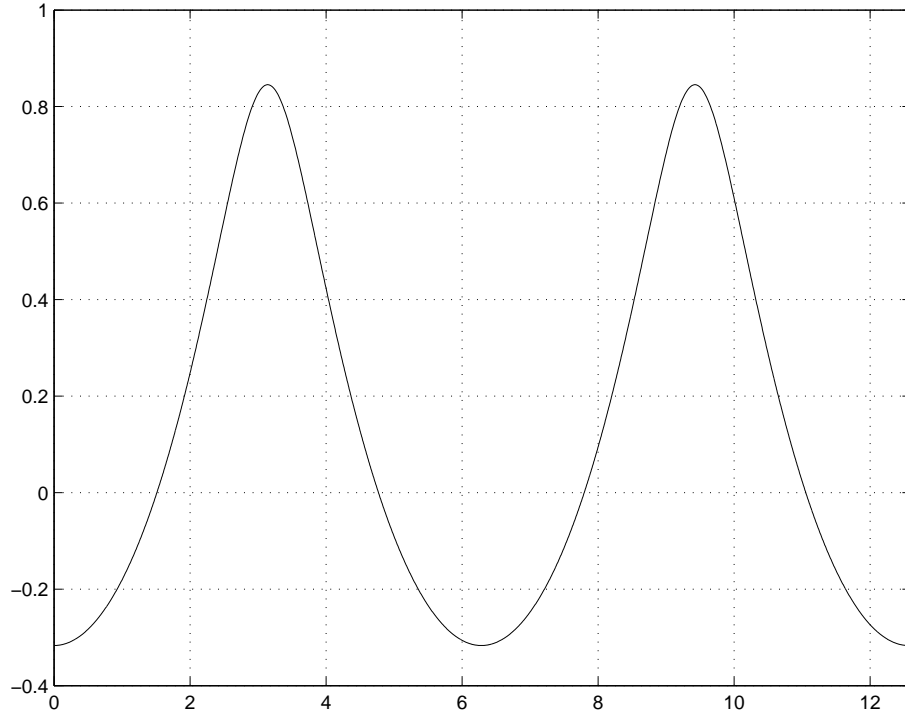


Рис. 6.36. Профиль поверхностной волны при $t = 1.5$

На рис. 6.46 приведен профиль поверхности при $t = 11.5$. Спектр решения при $t = 11.5$ приведен на рис. 6.47. На рис. 6.48 приведены значения оценочных функционалов.

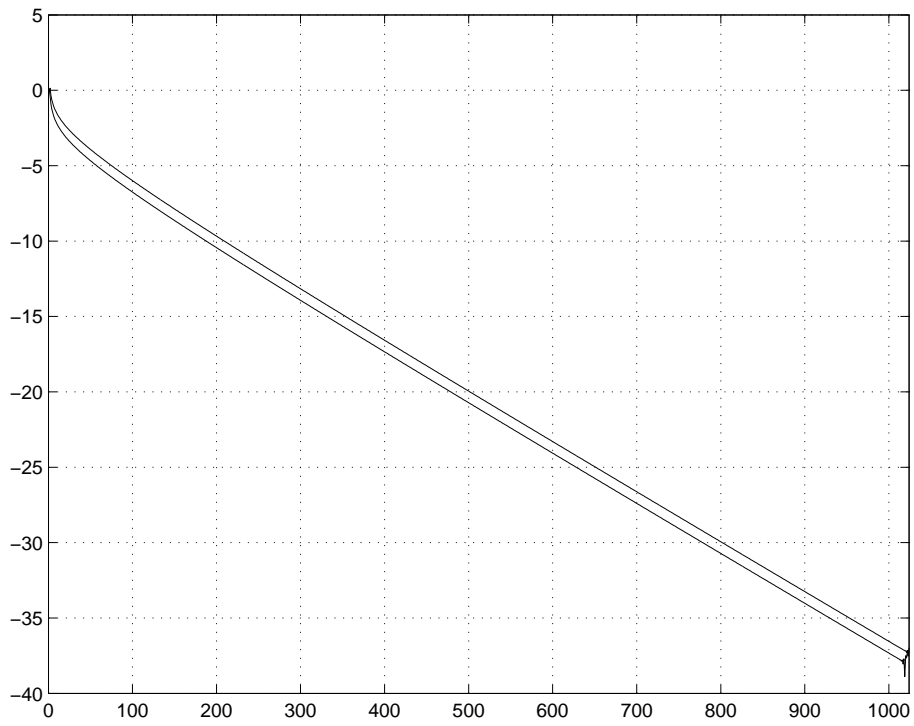


Рис. 6.37. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1.5$

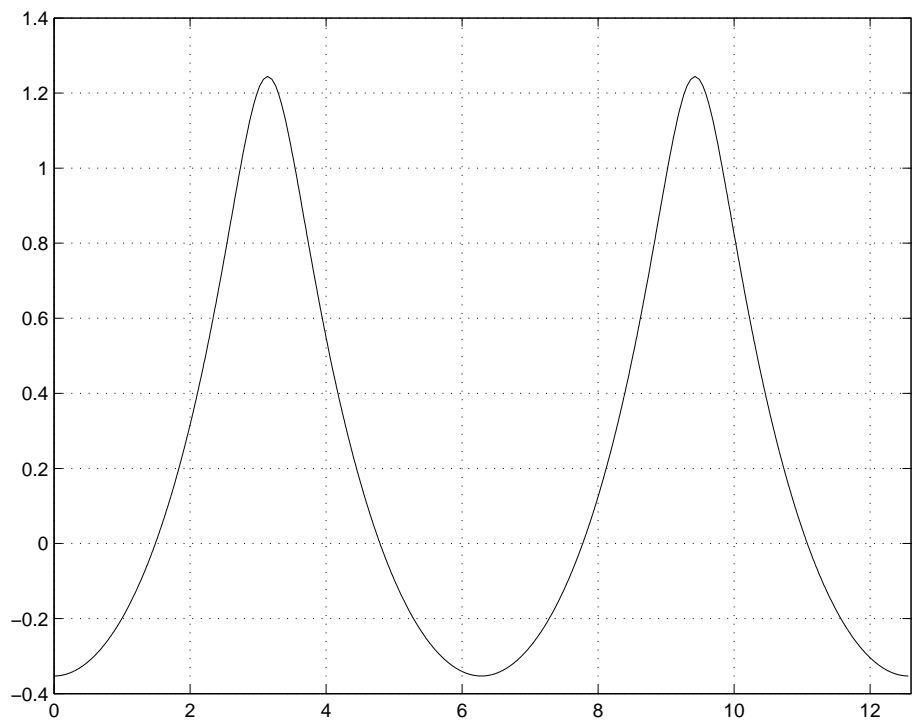


Рис. 6.38. Профиль поверхностной волны при $t = 1.6$

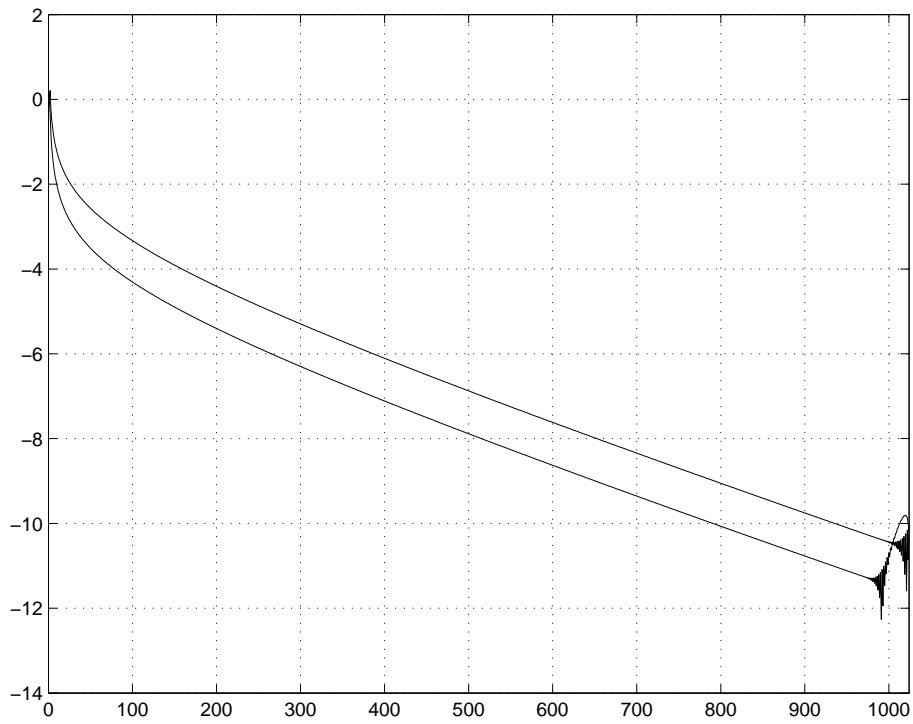


Рис. 6.39. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1.6$

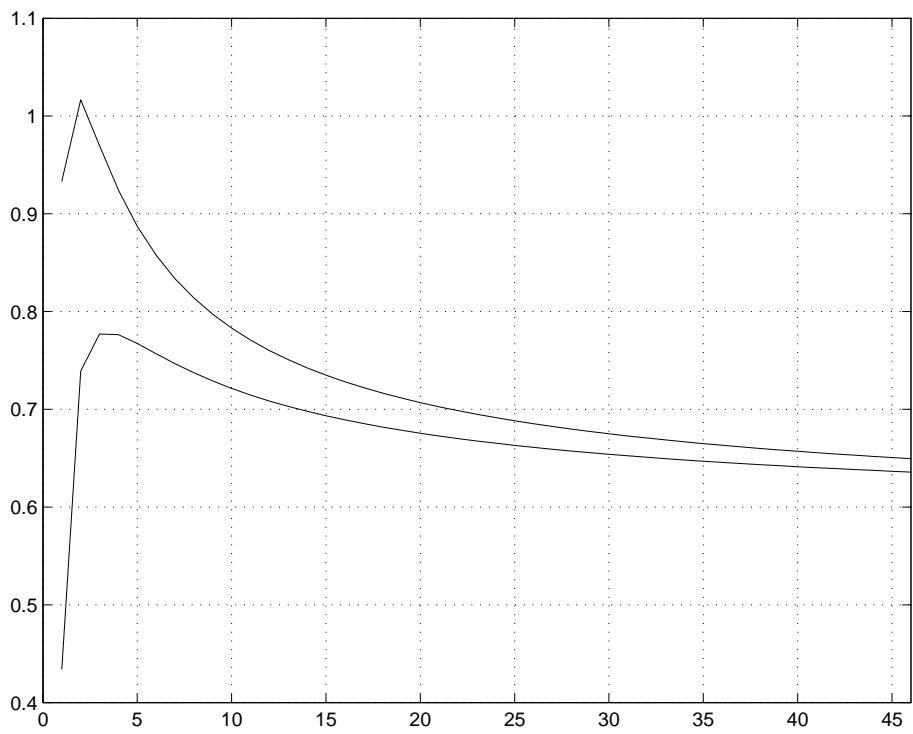


Рис. 6.40. Значение оценочного функционала при $t = 1.0$

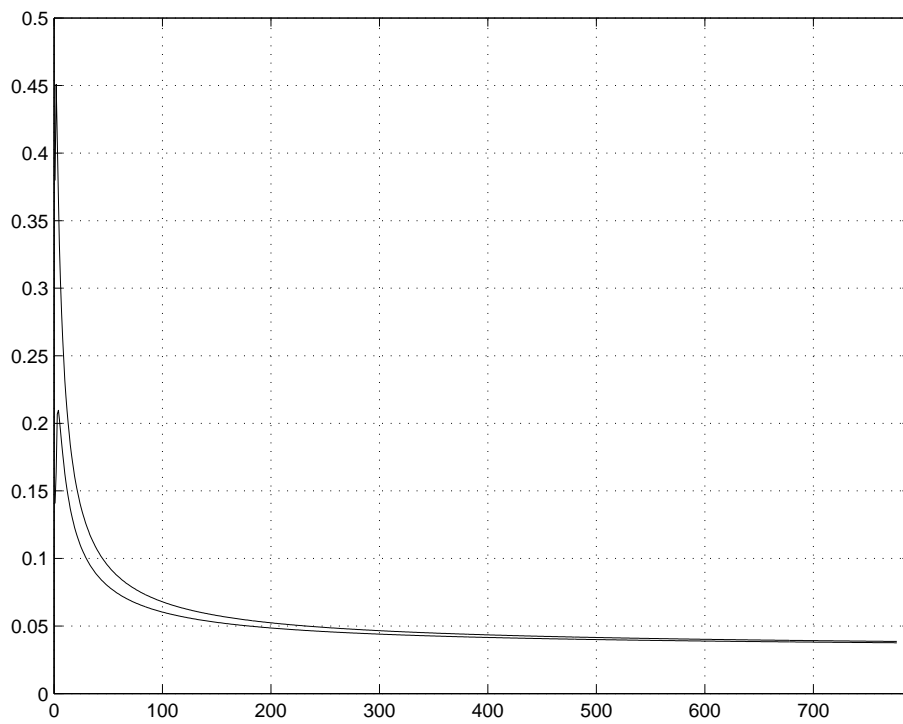


Рис. 6.41. Значение оценочного функционала при $t = 1.5$

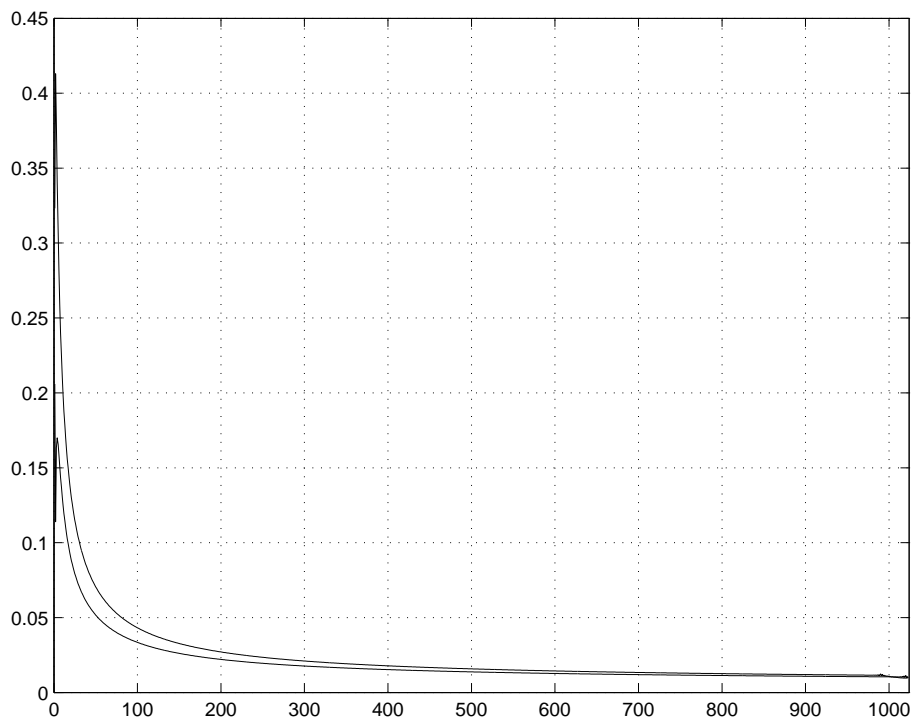


Рис. 6.42. Значение оценочного функционала при $t = 1.6$

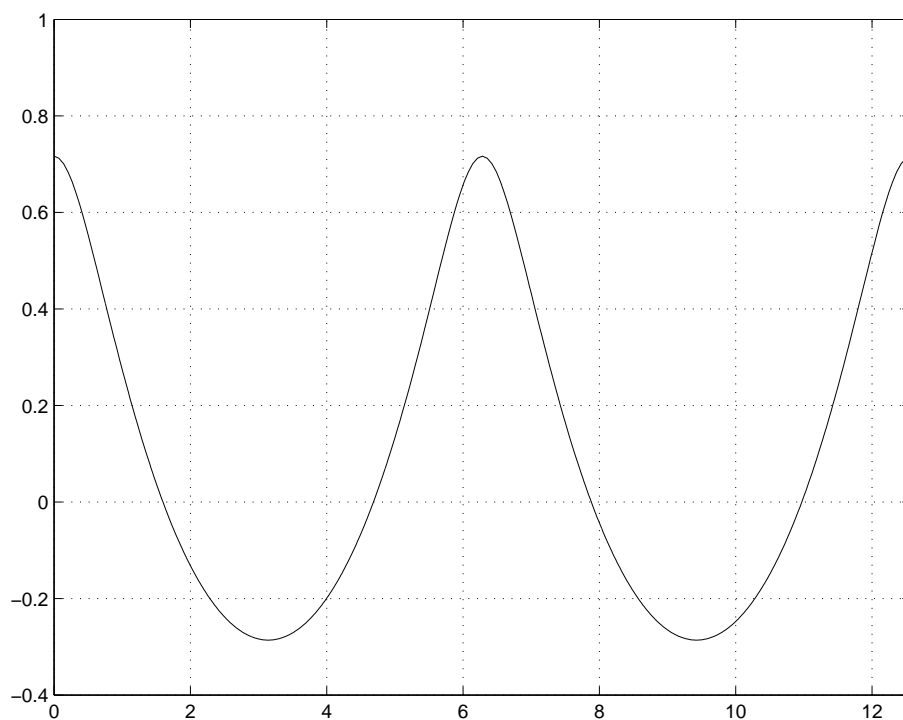


Рис. 6.43. Профиль поверхностной волны при $t = 3.6$

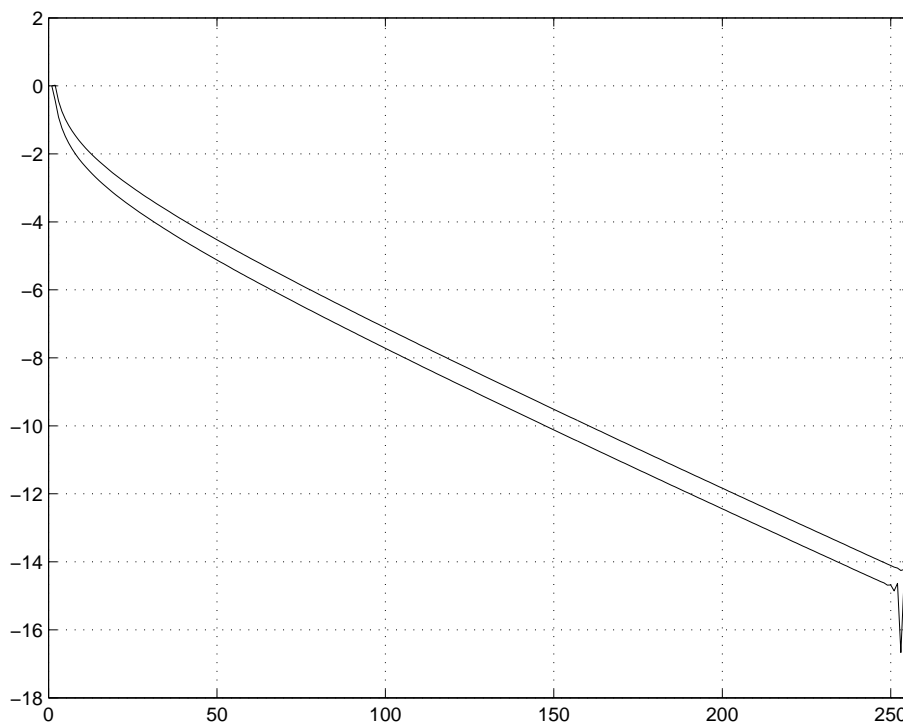


Рис. 6.44. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 3.6$

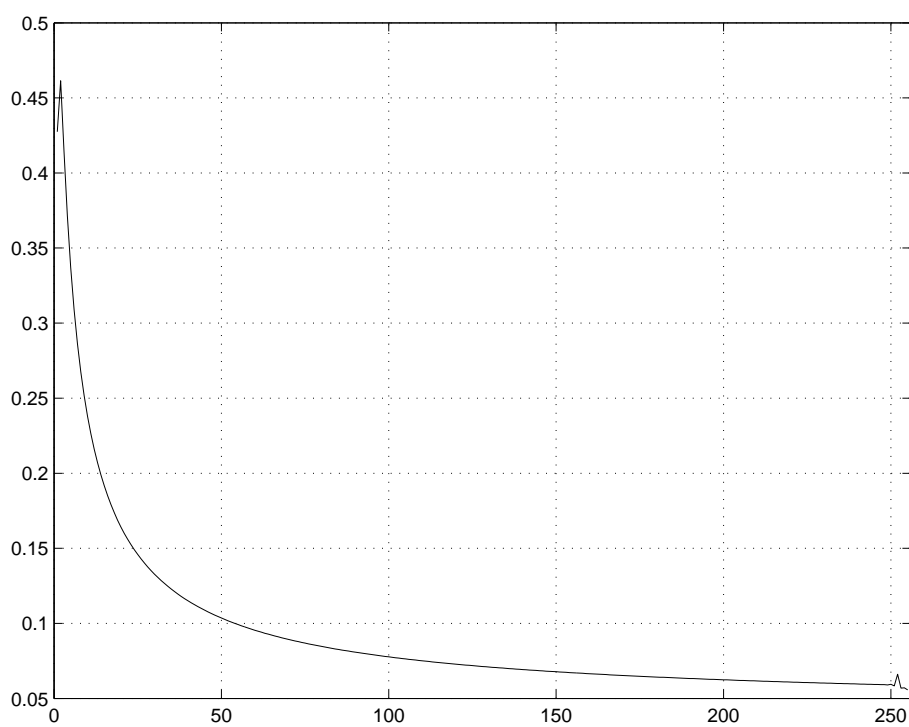


Рис. 6.45. Значения оценочных функционалов при $t = 3.6$

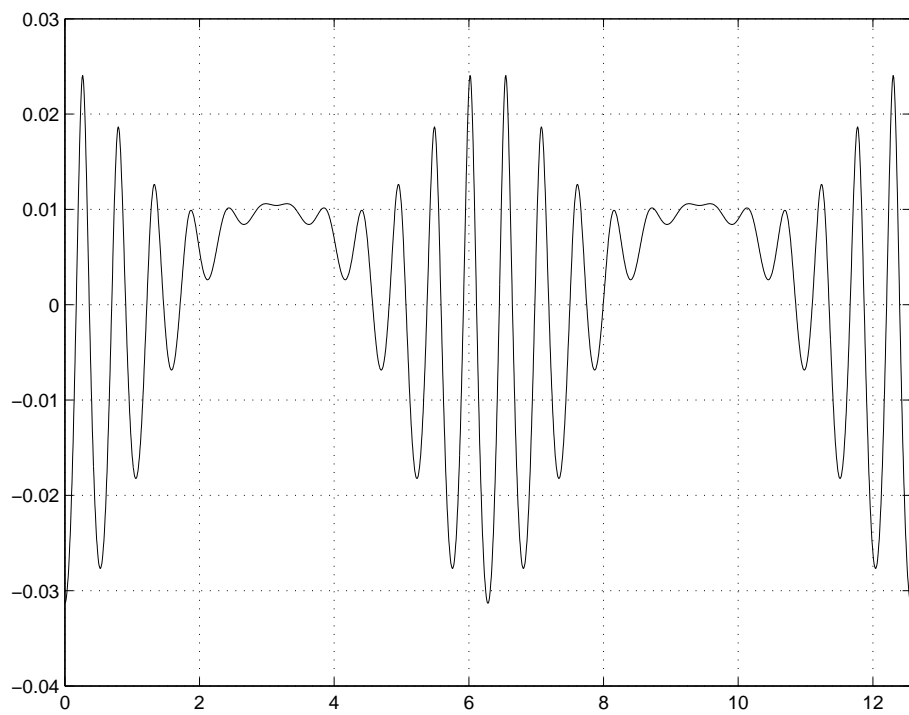


Рис. 6.46. Профиль поверхностной волны при $t = 11.5$

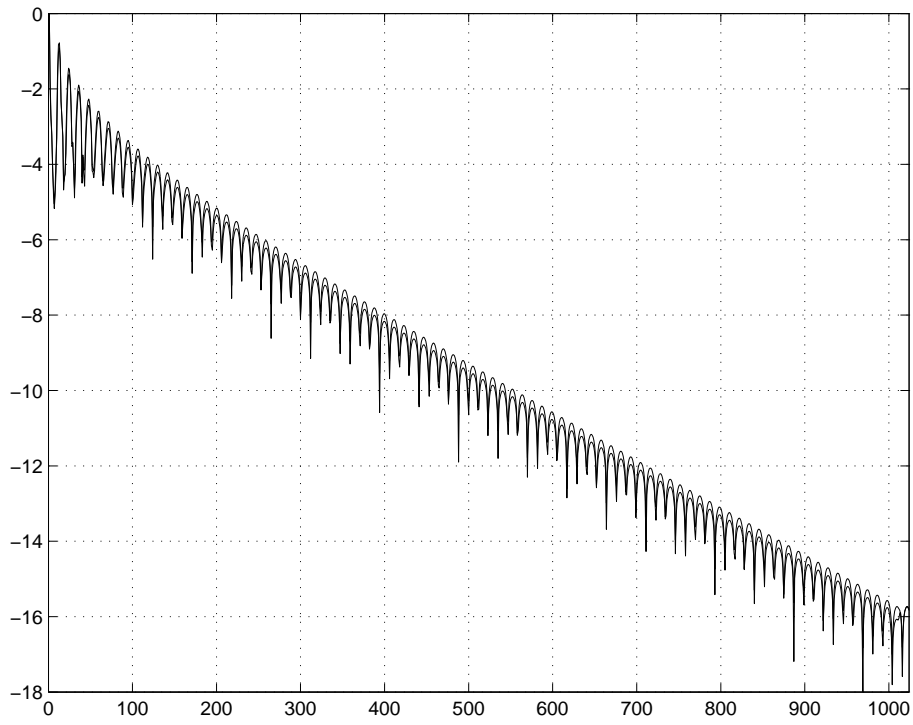


Рис. 6.47. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 11.5$

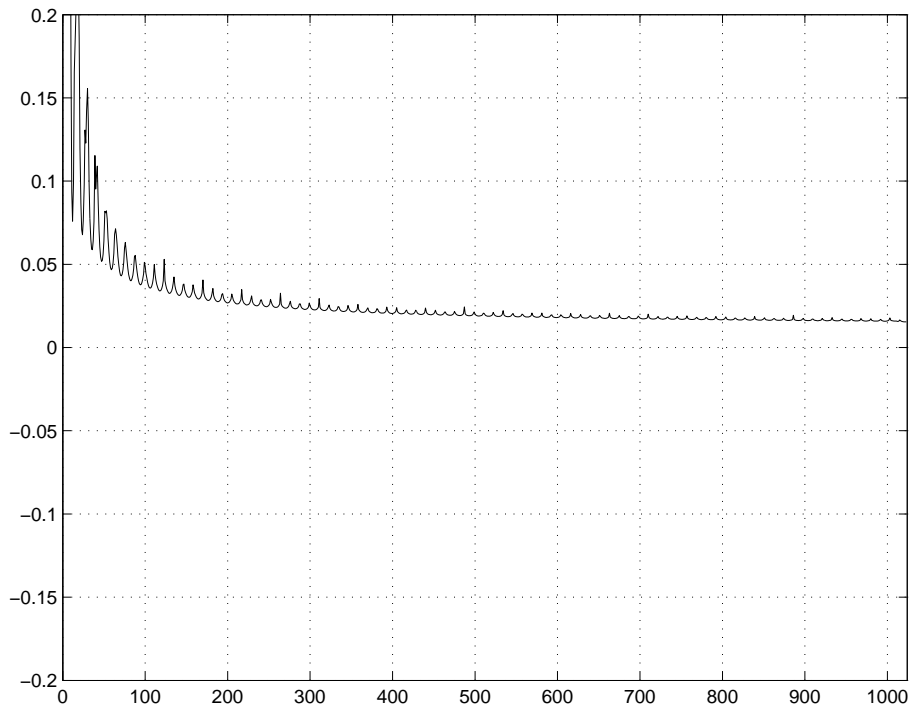


Рис. 6.48. Значения оценочных функционалов при $t = 11.5$

6.7. Моделирование волн-убийц

В настоящем разделе опишем два вычислительных эксперимента, в ходе которых обнаружим возникновение волн-убийц.

Опишем параметры первого эксперимента.

Количество гармоник, участвующих в расчете $N = 1024$.

Шаг по времени $\tau = 0.001$.

Ускорение свободного падения $g = 1.0$.

Начальное условие : функции $R(u, 0)$ и $V(u, 0)$ выбирались случайным образом.

Спектр в логарифмическом масштабе начальных функций приведен на рис. 6.49, на рис. 6.50 дан профиль начальной волны.

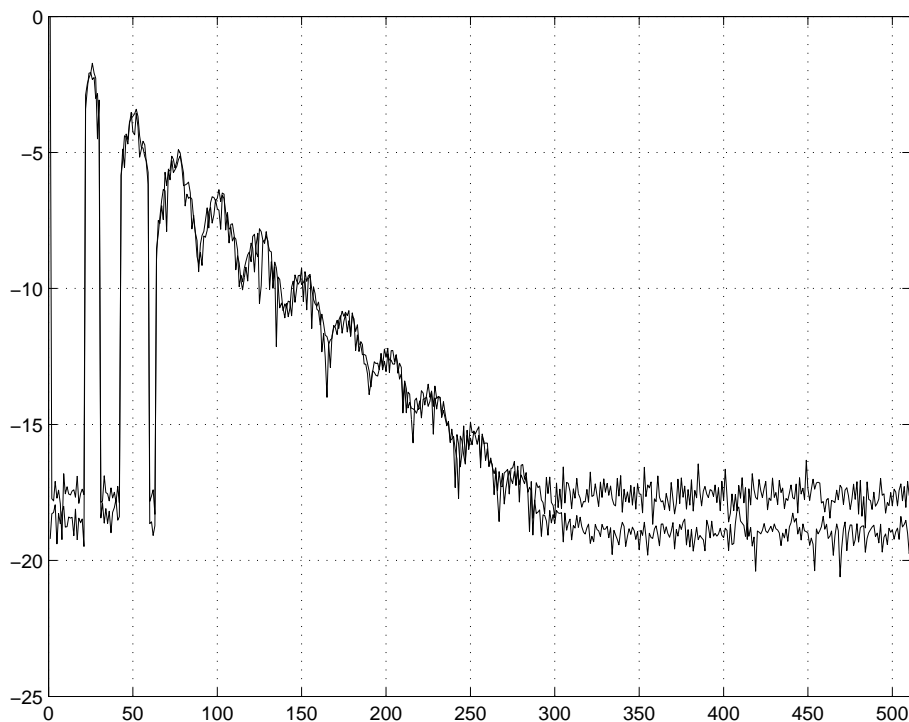


Рис. 6.49. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 0.0$

Расчет проводился при $t \in [0, 7000]$.

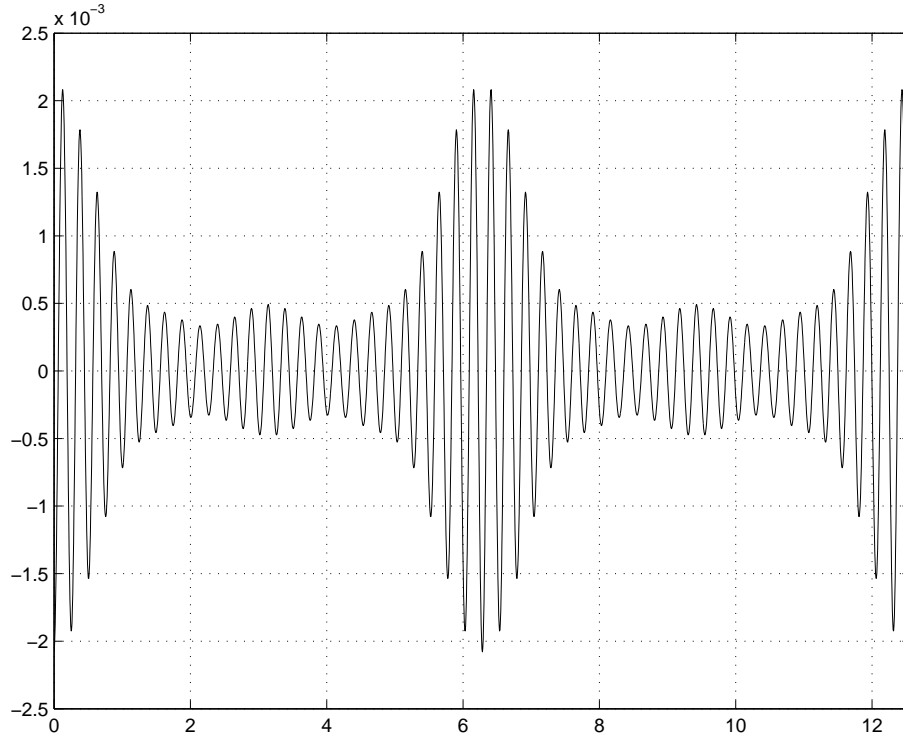


Рис. 6.50. Профиль поверхностной волны при $t = 0.0$

| | |
|---|----------------|
| Среднее значение амплитуды, $\frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t) dt$: | 0.003226439512 |
| Максимальное значение амплитуды, $\max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t_F) $: | 0.0136893619 |
| $\max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t_F) / \frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t) dt$: | 4.242869535812 |
| Время, при котором достигнута волна-убийца | 6832.0 |
| Максимум крутизны волны-убийцы | 0.297 |

На рис. 6.51 и 6.52 приведены спектр в логарифмическом масштабе и профиль волны-убийцы.

В силу важности численных экспериментов, касающихся волн-убийц, приведем еще один вычислительный эксперимент.

Опишем параметры второго эксперимента.

Количество гармоник, участвующих в расчете $N = 1024$.

Шаг по времени $\tau = 0.001$.

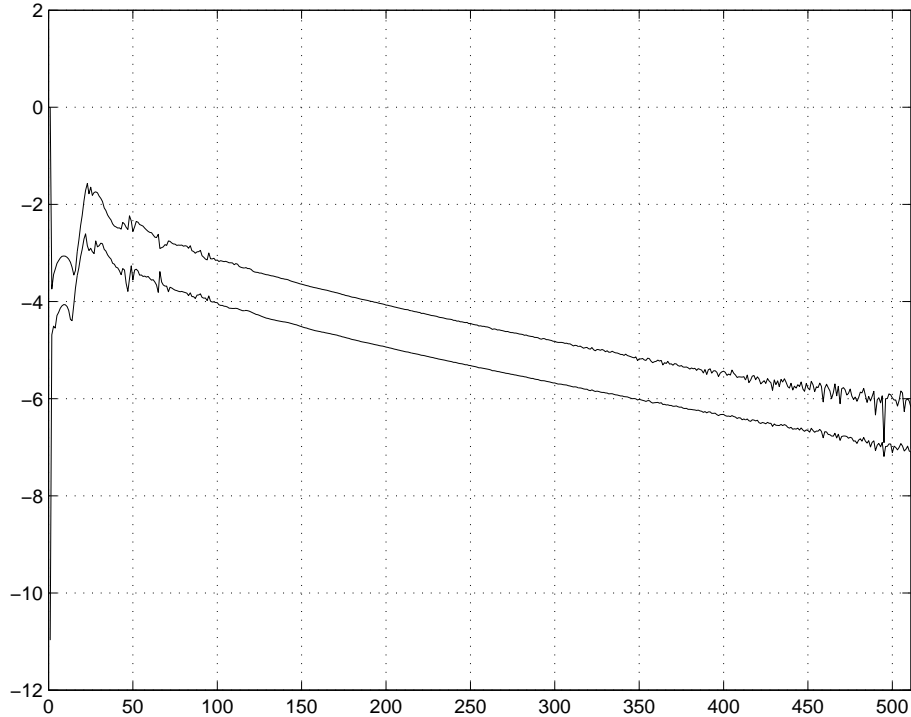


Рис. 6.51. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 6832.0$

Ускорение свободного падения $g = 1.0$.

Начальное условие функции $R(u, 0)$ и $V(u, 0)$ выбирались случайным образом. Спектр в логарифмическом масштабе начальных функций приведен на рис. 6.53, на рис. 6.54 дан профиль начальной волны.

Расчет проводился при $t \in [0, 7000]$.

| | |
|---|----------------|
| Среднее значение амплитуды, $\frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t) dt$ | 0.002816220421 |
| Максимальное значение амплитуды, $\max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t_F) $ | 0.012116236705 |
| $\max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t_F) / \frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t) dt$ | 4.302304114285 |
| Время, при котором достигнута волна-убийца | 4252.0 |
| Максимум крутизны волны-убийцы | 0.325 |

На рисунках 6.55 и 6.56 приведены спектр в логарифмическом масштабе и профиль волны-убийцы.

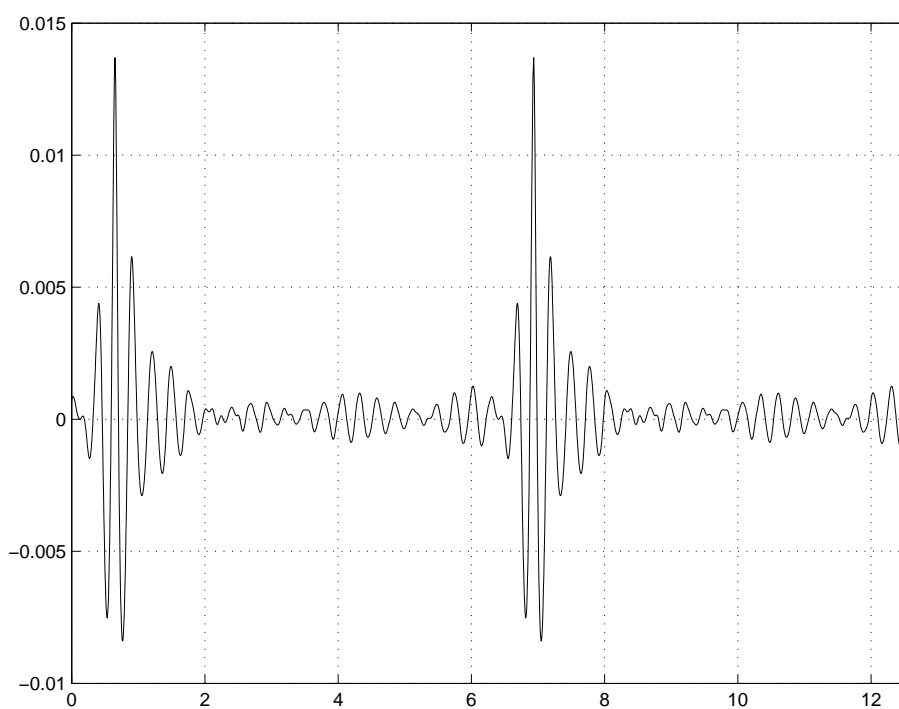


Рис. 6.52. Профиль поверхностной волны при $t = 6832.0$

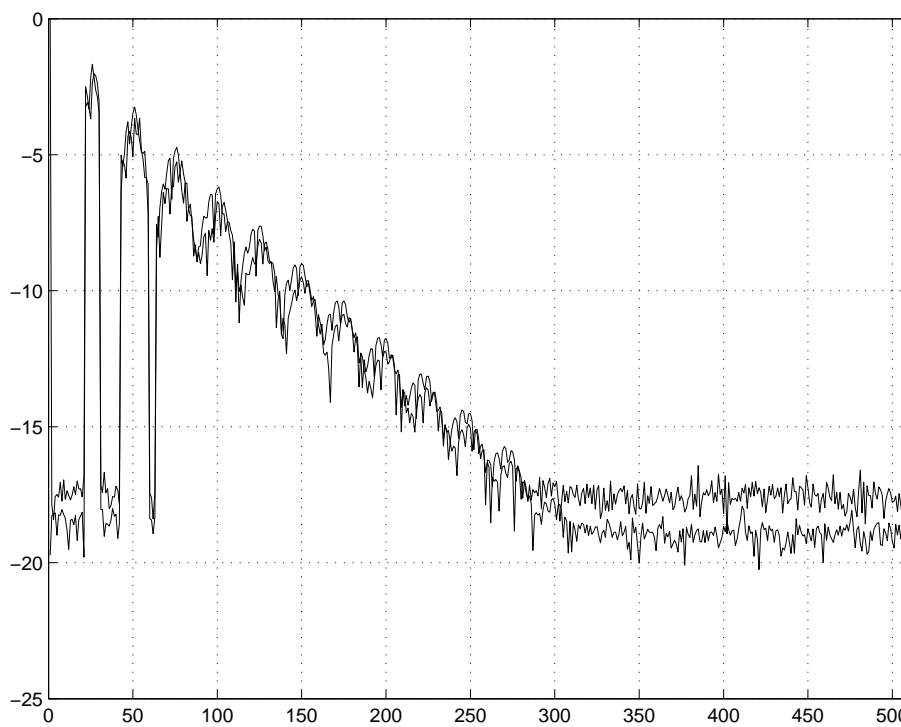


Рис. 6.53. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 0.0$

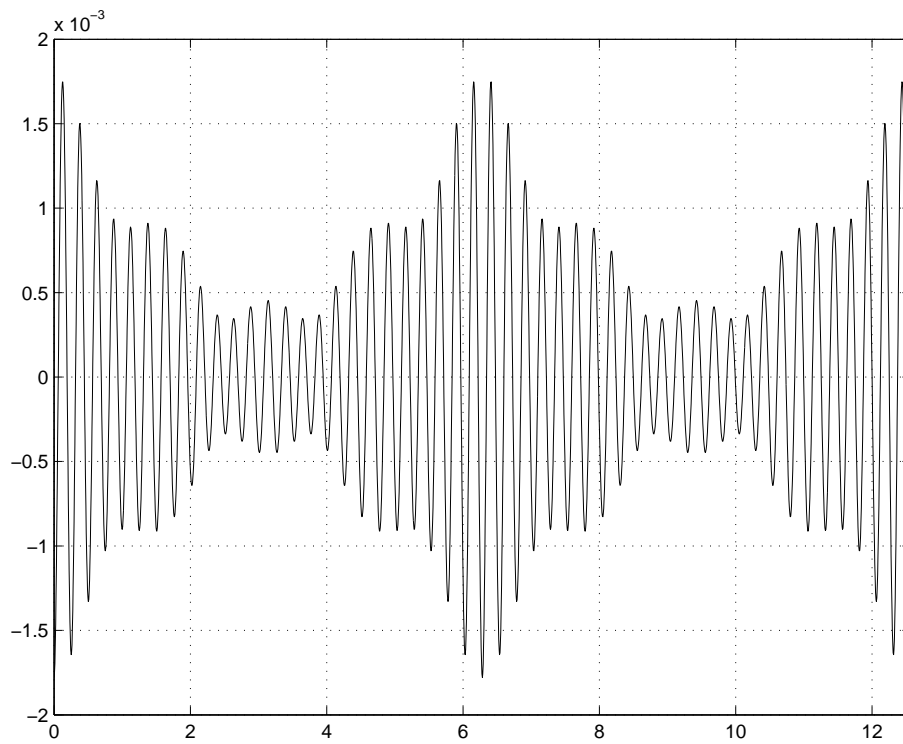


Рис. 6.54. Профиль поверхностной волны при $t = 0.0$

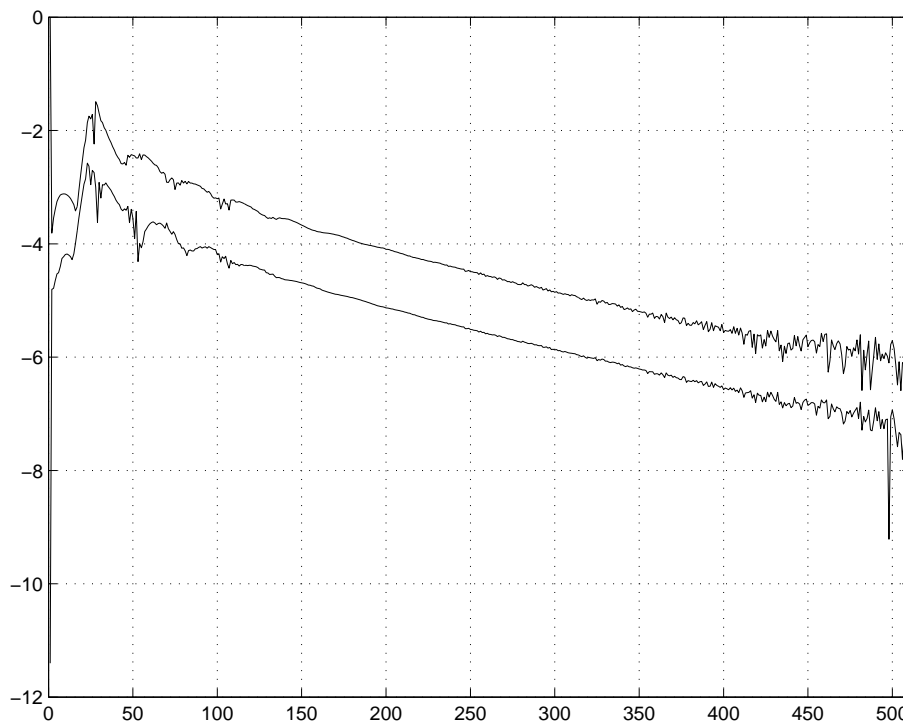


Рис. 6.55. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 4252.0$

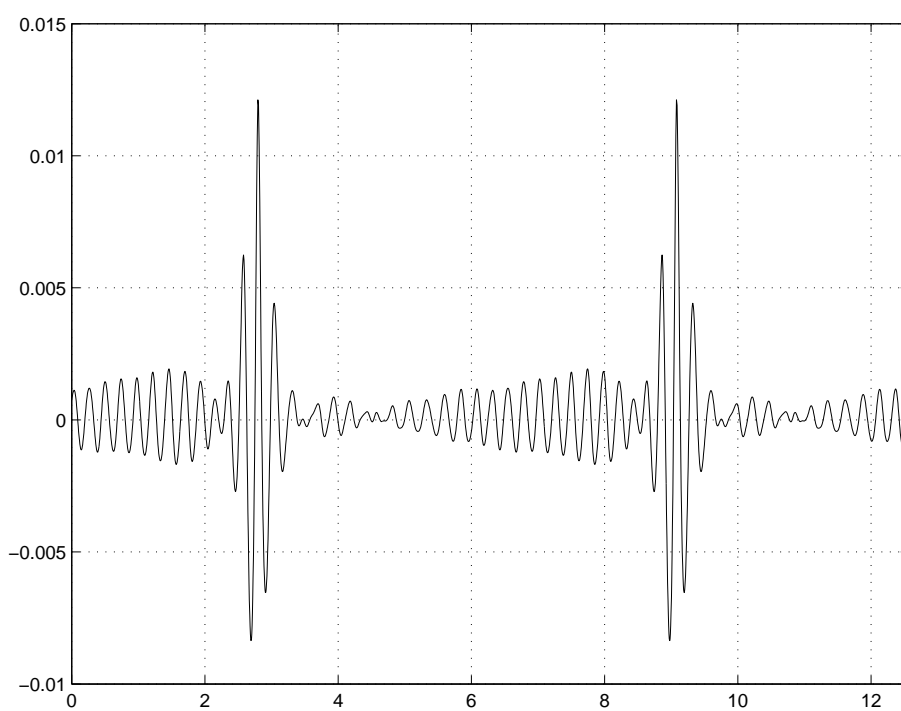


Рис. 6.56. Профиль поверхностной волны при $t = 4252.0$

Литература

- [1] *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972.
- [2] *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987.
- [3] *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
- [4] *Бабенко К.И., Петрович В.Ю., Рахманов А.И.* Вычислительный эксперимент в теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН. — 1988. — Т. 302. — №4ю — С. 781–785.
- [5] *Бабенко К.И., Петрович В.Ю., Рахманов А.И.* О доказательном эксперименте в теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН. — 1988. — Т. 303. — №5. С. 1033–1037.
- [6] *Василенко В. А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983.
- [7] *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
- [8] *Воинов В. В., Воинов О. В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН. — 1975. — Т. 221. — № 3. — С. 559–562.
- [9] *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексных областях. — М.: Мир, 1986.
- [10] *Гарипов Р. М.* Неустановившиеся волны над подводным хребтом // Докл. АН. — 1965. — Т. 161. — № 3. — С. 547–550.

- [11] *Гюнтер Н.М.* Об основной задаче гидродинамики // Известия Физ.-матем. института им. В.А. Стеклова. 1927. — Т. 2. — С. 1-168.
- [12] *Дьяченко А. И., Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.* Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости// Физика плазмы. — 1999. — Т. 22. — № 10. — С. 916–928.
- [13] *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986.
- [14] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004.
- [15] *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближений. — М.: Наука, 1984.
- [16] *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
- [17] *Куркин А. А., Пеленовский Е. Н.* Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. — Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. университет, 2004.
- [18] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа, — М.: Наука, 1965.
- [19] *Налимов В. И.* Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши—Пуассона // Докл. АН. — 1969. — Т. 189. — № 1. — С. 45–49.
- [20] *Налимов В. И.* Задача Коши—Пуассона// Динамика сплошной среды. — 1974. — Т. 18. — С. 104–210.
- [21] *Налимов В. И.* Нестационарные вихревые волны // Сиб. мат. журн. — 1996. Т. 37. — № 6. — С. 1356–1366.

- [22] *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
- [23] *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств// Докл. АН. — 1971. — Т. 200. — № 4. — С. 789–792.
- [24] *Протопопов Б. Е.* Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины// Вычислительные методы прикладной гидродинамики. — 1988. — Т. 84. — С. 91–105.
- [25] *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Физматлит, 2002.
- [26] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
- [27] *Солонников В. А.* Разрешимость задачи об эволюции вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью, на конечном интервале времени// Алгебра и анализ. — 1991. — Т. 1. — С. 222–257.
- [28] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
- [29] *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008.
- [30] *Шамин Р. В.* К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления — 2007. — Т. 21. — С. 133–148.
- [31] *Шамин Р. В.* Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью// Сиб. журн. выч. мат. — 2006. — Т. 9. — № 4. — С. 325–340.

- [32] *Шамин Р. В.* О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. — 2006. — Т. 406. — № 5. — С. 112-113.
- [33] *Шамин Р. В.* Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. — 2008. — Т. 418. — № 5. — С. 112-113.
- [34] *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981.
- [35] *Юдович В.И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычислит. математики и математической физики. 1963 — Т. 3. — №6. — С. 1032–1066.
- [36] *Butzer P.L., Berens H.* Semi-groups of operators and approximations. — Springer-Verlag, N.-Y., 1967.
- [37] *Craig W., Sulem C.* Numerical simulation of gravity waves // J. Comput. Phys. — 1993. — V. 108. — P. 73–83.
- [38] *Dyachenko A. I., Kuznetsov E. A., Spector M. D. and Zakharov V. E.* Analytical description of the free surface dynamics of an ideal uid (canonical formalism and conformal mapping) // Phys. Lett. A. — 1996. — 221. — P. 73–79.
- [39] *Kato T.* On classical Solutions of the Two-Dimensional Non-Stationary Euler Equation // ARMA. 1967. — V. 25. — P. 188-200.
- [40] *Lichtenstein L.* Grundlagen der Hydromechanik. — Berlin, 1929.
- [41] *Nishida T.* A note on a theorem of Nirenberg // J. Differential Geom. — 1977. — V. 12. — P. 629–633.

- [42] *Peetre J.* Introduction to interpolation, Lecture notes, Department of Mathematics. — Lund, 1966.
- [43] *Taylor G.* The Instability of Liquid Surface when Accelerated in Direction Perpendicular to their Planes. I // Proc. Roy. Soc. — 1950. — T. 201. Ser. A, N 1065. — P. 192–196.
- [44] *Treves F.* Ovsyannicov theorem and hyperdifferential operator. — Rio de Janeiro, Instituto de Mathematica Pure e Aplicada, 1968.
- [45] *Tsai W., Yue D.* Computations of nonlinear free-surface flows // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1996. — V. 28. — P. 249–278.
- [46] *Wu S.* Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D // J. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 12. — № 2. — P. 445–495.
- [47] *Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Prokofiev A. O.* Freak waves as nonlinear stage of Stokes wave modulation instability // Eur. J. Mech. B Fluids. — 2006. — V. 25. — P. 677–692.
- [48] *Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A.* New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B Fluids. — 2002. — V. 21. — P. 283–291.